MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2020
Blatt 11
22.07.2020

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II”

41. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2011).* Man bestimme die Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ einer Drehung im euklidischen $(\mathbb{R}^3, \circ)$ mit der Drehachse $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und dem Drehwinkel $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

42. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2010).* Man zeige, daß die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x) = A \cdot x, \quad \text{mit} \quad A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 7 \\ -1 & -8 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

eine Drehung im $\mathbb{R}^3$ beschreibt. Man bestimme für diese Drehung einen Richtungsvektor der Drehachse und den Cosinus des Drehwinkels.

43. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2009).* Es seien

$$v_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

   a) Man zeige, daß es genau eine orthogonale Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\varphi(v_1) = e_1$, $\varphi(v_2) = e_2$ und $\varphi(v_3) = e_3$ gibt.
   b) Man zeige, daß die Abbildung φ eine Drehung ist, und bestimme Drehachse und Cosinus des Drehwinkels.

44. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2016).* Gegeben sei der euklidische Vektorraum $\mathbb{R}^3$, versehen mit dem Standardskalarprodukt sowie den Koordinaten x_1, x_2, x_3. Für eine Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sei

$$f_S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f_S(x) = S\,x,$$

die zugehörige lineare Abbildung.

   a) Man bestimme die beiden Matrizen $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so daß f_S eine Drehung um die x_2–Achse mit den Drehwinkel $\frac{\pi}{4}$ ist.
   b) Man bestimme diejenige Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so daß f_S die Spiegelung an der Ebene E mit der Gleichung $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ ist.
   c) Man bestimme eine Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so daß f_S eine orthogonale Abbildung ist, die weder eine Drehung noch eine Spiegelung ist.