MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2020
Blatt 9
08.07.2020

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II"

33. a) Man bestimme unter Verwendung der Additionstheoreme

$$\begin{aligned}\cos(\varphi \pm \psi) &= \cos\varphi\,\cos\psi \mp \sin\varphi\,\sin\psi\\ \sin(\varphi \pm \psi) &= \sin\varphi\,\cos\psi \pm \cos\varphi\,\sin\psi\end{aligned}$$

die Matrizen $D_\varphi \cdot D_\psi$ und $S_\varphi \cdot S_\psi$ sowie $D_\varphi \cdot S_\psi$ und $S_\varphi \cdot D_\psi$ für $\varphi,\ \psi \in \mathbb{R}$.

b) Man interpretiere die Ergebnisse von a) geometrisch.

34. Im euklidischen $(\mathbb{R}^2, \circ)$ seien $v = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix}$ gegeben.

a) Man bestimme alle orthogonalen Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(v) = w$ und gebe die Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $f = \ell_A$ an.

b) Welche geometrische Bedeutung besitzen die in a) ermittelten Abbildungen?

35. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2002).* Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = A\,x$, die lineare Abbildung des euklidischen Vektorraums $(\mathbb{R}^2, \circ)$ mit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

a) Man zeige, daß genau dann $(*)$ $f(x) \perp x$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$ gilt, wenn für die Koeffizienten $a_{11} = a_{22} = 0$ und $a_{12} + a_{21} = 0$ erfüllt ist.

b) Man bestimme alle linearen Abbildungen f mit $(*)$ und $f\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

c) Man bestimme alle orthogonalen Abbildungen f mit $(*)$. Wie lautet jeweils die geometrische Bezeichnung dieser Abbildungen?

36. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 1990).* Der Endomorphismus f des euklidischen $\mathbb{R}^2$ (versehen mit dem Standardskalarprodukt $\circ$) habe die Eigenschaft

$$f(x) \circ y = \det(x, y) \qquad \text{für alle} \quad x,\ y \in \mathbb{R}^2.$$

Man beweise, daß f eine Drehung des $\mathbb{R}^2$ ist, und berechne den Drehwinkel.