MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2020
Blatt 8
01.07.2020

# Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“

29. In $(\mathbb{R}^3, \circ)$ seien $u_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{6} \end{pmatrix}$ gegeben.

   a) Für $U = \langle u_1, u_2 \rangle$ bestimme man $U^\perp$ sowie eine Orthonormalbasis von $U$.

   b) Für $W = \langle w \rangle$ bestimme man eine Orthonormalbasis von $W^\perp$ und ergänze diese zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$.

30. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2008).* Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

   Man gebe eine orthogonale Matrix $P \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ an, so daß $P^\top AP$ Diagonalgestalt besitzt.

31. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 1999).* Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

   a) Man zeige, daß 1 ein Eigenwert von $A$ ist, und bestimme alle Eigenwerte und Eigenräume von $A$.

   b) Man bestimme eine orthogonale Matrix $P \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$, so daß $P^\top AP$ Diagonalgestalt besitzt.

   c) Man finde eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $A = B^2$.

32. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2008).*

   a) Man ergänze den Vektor $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ zu einer Basis $u_1$, $u_2$, $u_3$ des $\mathbb{R}^3$ aus (bezüglich des Standardskalarprodukts) paarweise orthogonalen Vektoren.

   b) Man zeige, daß es genau eine Matrix $U \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gibt, die $u_1$ als Eigenvektor zum Eigenwert 1 und $u_2$, $u_3$ als Eigenvektoren zum Eigenwert $-2$ besitzt.

   c) Man gebe die Matrix $U$ aus b) explizit an.