Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II"

25. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2010).* Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

   a) Man berechne die Eigenwerte der Matrix A.

   b) Man bestimme eine orthogonale Matrix $P \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $P^\top AP = D$.

26. Gegeben sei die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

   a) Man bestimme das charakteristische Polynom sowie die Eigenwerte von A.

   b) Man bestimme für jeden Eigenraum von A jeweils eine Orthonormalbasis.

   c) Man gebe eine orthogonale Matrix $P \in \mathrm{O}_4(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit $P^\top AP = D$ an.

27. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2013).* Gegeben sei die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

   a) Man begründe, daß M orthogonal diagonalisierbar ist, und bestimme eine Orthonormalbasis des euklidischen $\mathbb{R}^2$ (versehen mit dem Standardskalarprodukt) aus Eigenvektoren von M.

   b) Man zeige, daß durch $\sigma(x, y) = x^\top My$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$ ein Skalarprodukt σ auf $\mathbb{R}^2$ definiert wird, und bestimme eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$ bezüglich dieses Skalarprodukts σ.

28. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2007).* Man untersuche die folgenden Matrizen auf Orthogonalität und reelle Diagonalisierbarkeit:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}; \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$