MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2020
Blatt 6
17.06.2020

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“

21. Sei $\circ$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^5$ sowie $U = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle \subseteq \mathbb{R}^5$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Man bestimme eine Orthonormalbasis von $U^\perp$ sowie $\dim(U)$.

22. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2017).* Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 5 & 29 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \qquad \text{und} \qquad u_0 = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

a) Man zeige, daß die symmetrische Bilinearform

$$\sigma : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \sigma(x,y) = x^\top A\, y,$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Man bestimme im euklidischen Vektorraum $(\mathbb{R}^3, \sigma)$ eine Orthonormalbasis für das orthogonale Komplement $U^\perp$ von $U = \langle u_0 \rangle$.

23. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2014).* Man betrachte den euklidischen $\mathbb{R}^4$, versehen mit dem Standardskalarprodukt $\circ$; gegeben seien ferner

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4} \qquad \text{und} \qquad e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

a) Man bestimme eine Orthonormalbasis des Spaltenraumes U von A.

b) Man bestimmen alle $y \in U^\perp$ mit $e - y \in U$.

24. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2009).* Sei (V, σ) ein euklidischer Vektorraum. Für Untervektorräume $U,\, W \subseteq V$ zeige man:

a) $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$.

b) $(U \cap W)^\perp \supseteq U^\perp + W^\perp$.