MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2020
Blatt 5
10.06.2020

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“

17. Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

a) Man zeige, daß v_1, v_2, v_3 eine Basis von $U = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ ist.

b) Man bestimme eine Orthonormalbasis b_1, b_2, b_3 von U bezüglich des Standardskalarprodukts $\circ$.

c) Man stelle v_4 als Linearkombination von b_1, b_2, b_3 dar.

18. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2016).* Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \text{sowie} \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ \text{ und } \ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3;$$

ferner werde $\quad \sigma : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto \sigma(x, y) = x^\top A\, y, \quad$ betrachtet.

a) Man zeige, daß σ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Man berechne den Winkel $\sphericalangle_\sigma(e_1, e_2)$ zwischen e_1 und e_2 bezüglich σ.

c) Man bestimme eine Orthonormalbasis b_1, b_2, b_3 von $(\mathbb{R}^3, \sigma)$ mit $\langle b_1 \rangle = \langle e_1 \rangle$ und $\langle b_1, b_2 \rangle = \langle e_1, e_2 \rangle$.

19. a) Man bestimme alle $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ mit $|a_{ij}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ für alle i, $j \in \{1, 2\}$.

b) Gibt es ein $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ mit $|a_{ij}| = \frac{1}{\sqrt{3}}$ für alle i, $j \in \{1, 2, 3\}$?

c) Man gebe alle $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ mit $a_{11} = a_{22} = a_{33} = \frac{2}{3}$ und $a_{12} = \frac{1}{3}$ an.

d) Man gebe ein $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathrm{O}_4(\mathbb{R})$ mit $|a_{ij}| = \frac{1}{2}$ für alle i, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ an.

20. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2013).* Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrische Matrizen; weiter habe A den Rang n, und B sei positiv definit. Man zeige, daß die Bilinearform σ mit $\sigma(x, y) = x^\top ABA\, y$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ ist.