MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2020
Blatt 4
03.06.2020

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“

13. a) Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

betrachte man die Bilinearform $\sigma_A : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^3$ und bestimme $\sigma_A(x,y) = x^\top A\, y$ allgemein für

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

b) Man gebe für die Bilinearformen

- $\sigma_1(x,y) = x_1\, y_1 + x_2\, y_2 + 2\, x_3\, y_3 - x_1\, y_3 - x_3\, y_1$,
- $\sigma_2(x,y) = x_1\, y_1 + 2\, x_2\, y_2 + 3\, x_3\, y_3 + 4\, x_1\, y_2 + 5\, x_1\, y_3 + 6\, x_2\, y_3$,
- $\sigma_3(x,y) = x_1\, y_1 + x_2\, y_2 + x_3\, y_3 - x_1\, y_2 + x_1\, y_3 - x_2\, y_3$,
- $\sigma_4(x,y) = x_1\, y_1 + 2\, x_2\, y_2 + x_3\, y_3 + x_1\, y_2 + x_2\, y_1 + x_2\, y_3 + x_3\, y_2$

des $\mathbb{R}^3$ die entsprechenden Matrizen A_1, A_2, A_3, $A_4 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gemäß a) an.

c) Befindet sich unter den bei b) betrachteten Bilinearformen auch ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^3$?

14. Für den Parameter $s \in \mathbb{R}$ sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & s \\ 2 & s & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

gegeben.

a) Man bestimme alle $s \in \mathbb{R}$, für die σ_A ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Für $s = -1$ bestimme man bezüglich σ_A die Längen der Einheitsvektoren e_1, e_2, e_3 sowie die von ihnen eingeschlossenen Winkel.

c) Für $s = 1$ bestimme man einen Vektor $0 \neq v \in \mathbb{R}^3$, der bezüglich σ_A sowohl zu e_1 als auch e_3 orthogonal ist.

15. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2007).* In Abhängigkeit vom reellen Parameter $s \in \mathbb{R}$ sei die symmetrische Matrix

$$M_s = \begin{pmatrix} 1 & s & s^2 \\ s & 1 & s \\ s^2 & s & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

gegeben.

a) Man zeige $\det(M_s) = (1 - s^2)^2$ für alle $s \in \mathbb{R}$.

b) Für welche $s \in \mathbb{R}$ ist M_s invertierbar? Man gebe in diesen Fällen auch die zu M_s inverse Matrix M_s^{-1} an.

c) Für welche $s \in \mathbb{R}$ ist M_s positiv definit?

16. Sei (V, σ) ein euklidischer Vektorraum sowie $v,\, w \in V \setminus \{0_V\}$ mit $\varphi = \sphericalangle(v, w)$.

a) Für $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bestimme man $\sphericalangle(\lambda\, v, \mu\, w)$ und deute das Ergebnis geometrisch.

b) Man zeige den *Cosinussatz:*

$$\|v \pm w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 \pm 2\,\|v\|\,\|w\| \cos\varphi.$$

c) Man zeige den *Satz des Pythagoras:*

$$v \perp w \iff \|v \pm w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2.$$