MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2020
Repetitorium
31.07.2020

Repetitorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“

1. a) *(Klausurteilaufgabe Sommersemester 2018).* Für eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definiere man die Begriffe
   - „$\lambda \in \mathbb{R}$ ist Eigenwert von A.“ und „$x \in \mathbb{R}^n$ ist Eigenvektor von A.“
   - sowie „A ist diagonalisierbar.“.

   b) *(Klausurteilaufgabe Sommersemester 2016).* Man definiere für einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Begriffe
   - „Eigenvektor von A zu λ“ und „Eigenraum von A zu λ“ sowie
   - „algebraische Vielfachheit“ und „geometrische Vielfachheit“

   und formuliere
   - den „Hauptsatz über diagonalisierbare Matrizen“.

2. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2009).* Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 7 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

   a) Man zeige, daß $\lambda = 3$ ein Eigenwert von A ist, und bestimme den zugehörigen Eigenraum.

   b) Man zeige, daß $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ein Eigenvektor von A ist, und bestimme den zugehörigen Eigenwert.

   c) Man zeige, daß A diagonalisierbar ist, und gebe eine invertierbare Matrix $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ sowie eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $P^{-1}AP = D$ an.

3. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2014).* In Abhängigkeit vom Parameter $a \in \mathbb{R}$ sei die Matrix

$$M_a = \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ 1 & a+1 & 0 \\ 0 & 1 & a+1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

   gegeben. Man bestimme alle $a \in \mathbb{R}$, für die

   i) die Matrix M_a sowohl invertierbar als auch diagonalisierbar ist,

   ii) die Matrix M_a invertierbar, aber nicht diagonalisierbar ist,

   iii) die Matrix M_a nicht invertierbar, aber diagonalisierbar ist,

   iv) die Matrix M_a weder invertierbar noch diagonalisierbar ist.

4. *(Klausuraufgabe Sommersemester 2007).* Gegeben sei die Matrix

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2c & c & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3};$$

dabei ist $c \in \mathbb{R}$ ein reeller Parameter.

a) Man bestimme (in Abhängigkeit von c) die reellen Eigenwerte von A_c samt ihren algebraischen Vielfachheiten.

b) Man untersuche A_c (in Abhängigkeit von c) auf reelle Diagonalisierbarkeit.

c) Man bestimme für $c = 4$ eine invertierbare Matrix $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $P^{-1}A_4\,P = D$.

5. *(Klausuraufgabe Sommersemester 2014).*

a) Für einen Endomorphismus $f : V \to V$ des $\mathbb{R}$–Vektorraums V definiere man den Begriff „f ist diagonalisierbar“ und gebe eine dazu äquivalente Eigenschaft an.

b) In Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ sei die Matrix

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & 1 & t \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

gegeben. Man zeige, daß der Endomorphismus

$$f_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f_t(x) = A_t \cdot x,$$

genau dann diagonalisierbar ist, wenn $t = 0$ gilt.

c) Für $t = 0$ betrachte man die Matrix $A_0 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sowie den Endomorphismus $f_0 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ von b). Man bestimme eine invertierbare Matrix $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $D = P^{-1}A_0\,P$. Welche Bedeutung besitzt D für f_0?

6. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2007).* Man betrachte den Endomorphismus

$$\varphi : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad \varphi(A) = A + A^\top,$$

des $\mathbb{R}$–Vektorraums $\mathbb{R}^{2\times 2}$ der reellen 2×2–Matrizen.

a) Man bestimme die darstellende Matrix von φ bezüglich der Basis

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

b) Man zeige, daß φ diagonalisierbar ist, und bestimme eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aus Eigenvektoren für φ.

7. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2013).* Man betrachte den von den vier Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

aufgespannten Untervektorraum $V = \langle v_1, v_2, w_1, w_2 \rangle$ im $\mathbb{R}^3$.

a) Man zeige, daß v_1, v_2 eine Basis von V ist, und stelle w_1 und w_2 als Linearkombinationen von v_1, v_2 dar.

b) Man begründe, daß es genau einen Endomorphismus $f : V \to V$ von V mit $f(v_1) = w_1$ und $f(v_2) = w_2$ gibt, und gebe die darstellende Matrix von f bezüglich der Basis v_1, v_2 von V an.

c) Man zeige, daß f diagonalisierbar ist, und bestimme eine Basis von V aus Eigenvektoren von f.

8. *(Klausuraufgabe Sommersemester 2016).*

a) Für eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definiere man die Begriffe „A ist orthogonal.“ und „A ist orthogonal diagonalisierbar.“.

b) Man gebe einen Beweis für die aus der Vorlesung bekannte Aussage: jede orthogonal diagonalisierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist symmetrisch.

c) Man zeige, daß jede symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, die nur die Eigenwerte -1 und 1 besitzt, bereits orthogonal ist.

9. *(Klausuraufgabe Sommersemester 2007).* Gegeben sei die Matrix

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

a) Man zeige, daß 1 ein Eigenwert von A ist, und bestimme alle Eigenwerte und Eigenräume von A.

b) Man bestimme eine Matrix $P \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$, so daß $P^\top A P$ Diagonalgestalt hat.

c) Man finde eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit $A = B^2$.

10. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2015).* Man beweise oder widerlege die folgenden Ausssagen über reelle 2×2–Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$:

a) Ist A orthogonal, so muß $\det(A) = 1$ oder $\det(A) = -1$ sein.

b) Ist A orthogonal, so sind 1 und -1 die einzig möglichen reellen Eigenwerte von A.

c) Ist A orthogonal, so muß A den Eigenwert 1 oder den Eigenwert -1 besitzen.

d) Ist A orthogonal, so ist A auch invertierbar.

e) Ist A orthogonal, so ist A auch symmetrisch.

11. *(Klausuraufgabe Sommersemester 2016).*

 a) Für eine Bilinearform $\sigma : V \times V \to \mathbb{R}$ auf dem $\mathbb{R}$–Vektorraum V definiere man die Begriffe „Symmetrie“ und „positive Definitheit“. Ferner bestimme man alle $s,\, t \in \mathbb{R}$, für die die Bilinearform

$$\sigma_{s,t} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \sigma_{s,t}(x,y) = x^\top A_{s,t}\, y,$$

 auf dem $\mathbb{R}$–Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit der Matrix

$$A_{s,t} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & s & t \\ 1 & 1 & s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

 symmetrisch und positiv definit ist.

 b) Im euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^4$ bestimme man für den Untervektorraum

$$U = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + 2\,x_3 - 6\,x_4 = 0 \right\}$$

 eine Orthonormalbasis bezüglich des Standardskalarprodukts $\circ$.

12. *(Klausuraufgabe Sommersemester 2014).* In Abhängigkeit von $s \in \mathbb{R}$ betrachte man die Matrix

$$A_s = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & s & 6 \\ 0 & 6 & s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

 sowie die zugehörige Bilinearform

$$\sigma_s : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \sigma_s(x,y) = x^\top A_s\, y$$

 auf dem $\mathbb{R}$–Vektorraum $\mathbb{R}^3$.

 a) Man bestimme alle $s \in \mathbb{R}$, für die σ_s ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ ist.

 b) Für $s = 32$ bestimme man den Winkel, den die Einheitsvektoren e_1 und e_2 bezüglich des Skalarprodukts σ_{32} einschließen.

 c) Für $s = 20$ bestimme man eine Orthonormalbasis des von e_1 und e_2 erzeugten Unterraums $U = \langle e_1, e_2 \rangle$ bezüglich des Skalarprodukts σ_{20}.

13. *(Klausuraufgabe Sommersemester 2016).*

 a) Für einen Untervektorraum U eines euklidischen Vektorraums (V, σ) mit $\dim(V) < \infty$ definiere man die Begriffe „Orthonormalbasis von U“ und „orthogonales Komplement $U^\perp$ von U in V“.

 b) Im euklidischen $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt $\circ$ werde der von

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

 erzeugte Untervektorraum $U = \langle v_1, v_2 \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$ betrachtet.

 - Man bestimme für U und $U^\perp$ jeweils eine Orthonormalbasis.
 - Man berechne die Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ für die Spiegelung s_U am Untervektorraum U.

14. *(Klausuraufgabe Sommersemester 2014).* Man betrachte den Vektorraum $\mathbb{R}^3$, versehen mit dem Standardskalarprodukt $\circ$.

    a) Man gebe jeweils eine äquivalente Charakterisierung für
        - „$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = A \cdot x$, beschreibt eine Drehung."
        - „$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = A \cdot x$, beschreibt eine Spiegelung."

        durch Eigenschaften der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ an.

    b) Man zeige, daß es genau eine Drehung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gibt, die e_1 auf e_2 und e_2 auf e_3 abbildet, und bestimme ihre Drehachse sowie ihren Drehwinkel.

    c) Man entscheide, ob es eine Spiegelung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gibt, die e_1 auf e_2 und e_2 auf e_3 abbildet, und begründe die Entscheidung.

15. Der euklidische $\mathbb{R}^3$ sei dem Standardskalarprodukt versehen.

    a) Man zeige, daß die lineare Abbildung

    $$s_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ s_1(x) = S_1 \cdot x \quad \text{mit} \quad S_1 = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

    eine Spiegelung an einer Ebene $E_1 \subseteq \mathbb{R}^3$ beschreibt, und gebe eine Gleichung für die Ebene E_1 an.

    b) Es sei $s_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $s_2(x) = S_2 \cdot x$, die Spiegelung an der Ebene

    $$E_2 = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

    Man bestimme die Abbildungsmatrix $S_2 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ von s_2.

    c) Man zeige, daß die Komposition $d = s_2 \circ s_1$ eine Drehung ist, und bestimme die Drehachse sowie den Cosinus des Drehwinkels von d.

16. *(Klausuraufgabe Sommersemester 2012).* Man betrachte den Vektorraum $\mathbb{R}^3$, versehen mit dem Standardskalarprodukt $\circ$.

    a) Man bestimme die Abbildungsmatrix für eine Drehung mit der Drehachse $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und dem Drehwinkel φ mit $\cos\varphi = \frac{3}{5}$.

    b) Es sei $v \in \mathbb{R}^3$ mit $v \neq 0$ fest gewählt. Man zeige, daß es genau drei orthogonale Abbildungen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f \circ f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ und $f(v) = v$ gibt, und interpretiere diese geometrisch.

Bitte beachten: Die Aufgaben dieses Repetitoriums sollen der eigenständigen Wiederholung und Vertiefung des Stoffes vom Sommersemester dienen. Die Lösungsvorschläge werden zu gegebener Zeit veröffentlicht.