MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2020
Blatt 11
24.07.2020

# Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“ — Lösungsvorschlag —

41. a) Die Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ist genau dann orthogonal, wenn ihre Spalten eine Orthonormalbasis des euklidischen $\mathbb{R}^3$ bilden; dabei gilt

$$\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}1\\2\\s_{32}\end{pmatrix} \iff 2\cdot 1 + 1\cdot 2 + 2\cdot s_{32} = 0 \iff s_{32} = -2,$$

und in diesem Fall sind die beiden ersten Spalten von $S$ wegen

$$\left\|\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right\| = \left\|\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{9} = 1$$

schon orthonormierte Vektoren im euklidischen $\mathbb{R}^3$ mit dem Vektorprodukt

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} \times \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}-6\\6\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix},$$

so daß die Matrix $S$ genau dann orthogonal ist, wenn für ihre dritte Spalte

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}s_{13}\\s_{23}\\s_{33}\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix} \qquad \text{oder} \qquad \frac{1}{3}\begin{pmatrix}s_{13}\\s_{23}\\s_{33}\end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$$

gilt. Folglich gibt es mit

$$S_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\1 & 2 & 2\\2 & -2 & 1\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad S_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\1 & 2 & -2\\2 & -2 & -1\end{pmatrix}$$

genau zwei orthogonale Matrizen von der gesuchten Gestalt.

b) Gemäß a) bilden die Spalten der orthogonalen Matrix

$$S_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\1 & 2 & 2\\2 & -2 & 1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

ein Rechtssystem, und damit gilt $\det(S_1) = 1$; folglich beschreibt die lineare Abbildung $\ell_{S_1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\ell_{S_1}(x) = S_1 \cdot x$, eine Drehung. Die Drehachse $a$ stimmt als Fixpunktmenge von $\ell_{S_1}$ mit dem Eigenraum von $S_1$ zum Eigenwert $\lambda = 1$ überein; wegen

$$S_1 - 1 \cdot E_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2-3 & 1 & -2 \\ 1 & 2-3 & 2 \\ 2 & -2 & 1-3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}+2\cdot\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}+\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II}\leftrightarrow(-\frac{1}{6})\cdot\mathrm{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{I}+2\cdot\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist also $a = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Für den Drehwinkel $\varphi$ von $\ell_{S_1}$ gilt

$$2 \cdot \cos\varphi + 1 = \operatorname{Spur}(S_1) = \frac{2+2+1}{3} = \frac{5}{3}, \quad \text{also} \quad \cos\varphi = \frac{\frac{5}{3} - 1}{2} = \frac{1}{3}.$$

Ferner bilden gemäß a) die Spalten der orthogonalen Matrix

$$S_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

ein Linkssystem, und damit gilt $\det(S_2) = -1$; folglich beschreibt die lineare Abbildung $\ell_{S_2} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\ell_{S_2}(x) = S_2 \cdot x$, keine Drehung.

c) Die orthogonale Matrix

$$S_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

ist wegen $S_2^\top = S_2$ symmetrisch, und damit beschreibt die lineare Abbildung $\ell_{S_2} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\ell_{S_2}(x) = S_2 \cdot x$, eine Orthogonalspiegelung am Eigenraum $E = \operatorname{Eig}(S_2, 1)$ von $S_2$ zum Eigenwert $\lambda = 1$; wegen

$$S_2 - 1 \cdot E_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2-3 & 1 & 2 \\ 1 & 2-3 & -2 \\ 2 & -2 & -1-3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}+2\cdot\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}+\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$\dim E = 3 - \operatorname{Rang}(S_2 - 1 \cdot E_3) = 3 - 1 = 2,$$

so daß

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \right\}$$

eine Ebene ist. Ferner ist $S_1$ wegen $S_1^\top \neq S_1$ nicht symmetrisch, so daß die lineare Abbildung $\ell_{S_1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\ell_{S_1}(x) = S_1 \cdot x$, keine Orthogonalspiegelung, insbesondere also keine Ebenenspiegelung beschreibt.

42. a) Die Matrix

$$S_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

ist wegen $S_1^\top S_1 = E_3$ orthogonal und wegen $S_1^\top = S_1$ symmetrisch. Damit beschreibt die Abbildung $s_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $s_1(x) = S_1 \cdot x$, die Spiegelung am Eigenraum $\mathrm{Eig}(S_1; 1)$ von $S_1$ zum Eigenwert 1; wegen

$$S_1 - 1 \cdot E_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist also $s_1$ die Spiegelung an der Ebene $E_1 : x_1 + x_2 - 2\,x_3 = 0$.

b) Die gegebene Ebene $E_2 : x_1 - x_3 = 0$ besitzt das orthogonale Komplement

$$E_2^\perp = \mathbb{R} \cdot \widetilde{v} \qquad \text{mit} \qquad \widetilde{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Für $x \in \mathbb{R}^3$ betrachten wir die Zerlegung

$$x = \underbrace{u}_{\in E_2} + \underbrace{\widetilde{u}}_{\in E_2^\perp} \qquad \text{mit} \qquad \widetilde{u} = \lambda \cdot \widetilde{v} \qquad \text{für ein} \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

woraus wegen

$$u = x - \lambda \cdot \widetilde{v} = \begin{pmatrix} x_1 - \lambda \\ x_2 \\ x_3 + \lambda \end{pmatrix} \in E_2$$

zunächst

$$(x_1 - \lambda) - (x_3 + \lambda) = 0, \qquad \text{also} \qquad x_1 - x_3 = 2\,\lambda,$$

folgt. Somit ist

$$\begin{aligned} s_{E_2}(x) &= u - \widetilde{u} = (x - \lambda \cdot \widetilde{v}) - \lambda \cdot \widetilde{v} = x - 2\lambda \cdot \widetilde{v} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 - (x_1 - x_3) \cdot 1 \\ x_2 - (x_1 - x_3) \cdot 0 \\ x_3 - (x_1 - x_3) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = S_2 \cdot x \end{aligned}$$

mit

$$S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

c) Für die Komposition $d = s_2 \circ s_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $d(x) = S \cdot x$, gilt

$$S = S_2 \cdot S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

wegen $S^\top S = E_3$ ist $S$ orthogonal, so daß $d$ wegen

$$\det(S) = \frac{1}{3^3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= \frac{1}{27} \cdot \big( (8 + 8 + (-1)) - ((-4) + (-4) + (-4)) \big) = 1$$

eine Drehung beschreibt. Wegen

$$S - 1 \cdot E_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{III}+2\cdot\text{I}}{\overset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow}}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \underset{(-\frac{1}{3})\cdot\text{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-3\cdot\text{II}}{\overset{\text{I}-2\cdot\text{II}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Drehachse von $d$, und für den Drehwinkel $\sigma \in [0, \pi]$ gilt

$$2 \cos \sigma + 1 = \operatorname{Spur}(S) = 2, \qquad \text{also} \qquad \cos \sigma = \frac{1}{2};$$

es ist also $d$ eine Drehung um einen Drehwinkel $\sigma = \pm\frac{\pi}{3}$.

43. Wir betrachten den euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^3$, versehen mit dem Standardskalarprodukt $\circ$.

a) Die beiden gegebenen Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

sind keine skalaren Vielfachen voneinander und folglich linear unabhängig; das Gram–Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren liefert dann im ersten Schritt $a_1 = v_1$ mit $\|a_1\| = 3$, also

$$b_1 = \frac{1}{\|a_1\|} \cdot a_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

sowie im zweiten Schritt

$$a_2 = v_2 - (v_2 \circ b_1) \cdot b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{3} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mit $\|a_2\| = 1$, also

$$b_2 = \frac{1}{\|a_2\|} \cdot a_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Folglich sind $b_1$, $b_2$ ein Orthonormalsystem von $(\mathbb{R}^3, \circ)$ mit

$$\langle b_1 \rangle = \langle v_1 \rangle \qquad \text{und} \qquad \langle b_1, b_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle,$$

und mit

$$b_3 = b_1 \times b_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

bilden $b_1, b_2, b_3$ eine Orthonormalbasis (Rechtssystem) von $(\mathbb{R}^3, \circ)$.

b) Zu bestimmen ist eine (orthogonale) Matrix $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so daß die lineare Abbildung

$$f_D : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f_D(x) = D\,x,$$

eine Drehung um den Winkel $\varphi$ mit $\cos\varphi = \frac{3}{5}$ (also $\sin\varphi = \pm\frac{4}{5}$) mit der Drehachse $\mathbb{R}\cdot v_1$ beschreibt; damit besitzt $f_D$ bezüglich der in a) bestimmten Orthonormalbasis $b_1, b_2, b_3$ von $(\mathbb{R}^3, \circ)$ etwa die darstellende Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R}).$$

Mit der orthogonalen Matrix

$$P = (b_1, b_2, b_3) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$$

gilt gemäß dem Basiswechsel $M = P^\top D\,P$ und damit

$$\begin{aligned} D = P\,M\,P^\top &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot P^\top \\ &= \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 10 & -2 & 11 \\ 10 & -5 & -10 \\ 5 & 14 & -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}. \\ &= \frac{1}{45} \begin{pmatrix} 35 & -4 & 28 \\ 20 & 35 & -20 \\ -20 & 28 & 29 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

44. a) Mit der Drehmatrix

$$D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

ergibt sich

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3};$$

damit beschreibt eine lineare Abbildung $d : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die bezüglich einer Orthonormalbasis $b_1$, $b_2$, $b_3$ von $(\mathbb{R}^3, \circ)$ die darstellende Matrix $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ besitzt, eine Drehung mit der Drehachse $\mathbb{R} \cdot b_3$ und dem Drehwinkel $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Wegen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

können wir also

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

wählen; bei der Reihenfolge $b_2$, $b_1$, $b_3$ wird die entsprechende Drehung mit dem entgegengesetzten Drehsinn betrachtet.

b) Mit der orthogonalen Matrix

$$P = (b_1, b_2, b_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$$

ergibt sich für die darstellende Matrix von $d$ bezüglich der Standardbasis $e_1$, $e_2$, $e_3$ von $\mathbb{R}^3$, also für die Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ von $d$ mit $d(x) = A\cdot x$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$, über den Basiswechsel $P^\top A P = M$ damit

$$A = PMP^\top = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{3}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot P^\top =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix};$$

für die entsprechende Drehung mit dem entgegengesetzten Drehsinn erhält man die Abbildungsmatrix $A^\top = A^{-1} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$.

c) Es ist nicht möglich, dass die Drehung $d : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bezüglich einer Basis $c_1$, $c_2$, $c_3$ von $\mathbb{R}^3$ eine darstellende Matrix in Diagonalgestalt besitzt; ansonsten wäre der Endomorphismus $d$ von $\mathbb{R}^3$ und damit jede seiner darstellenden Matrizen, also auch die Matrix $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ diagonalisierbar. Dies ist aber nicht der Fall, da ihr charakteristisches Polynom

$$\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda \cdot E_3) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} \overset{\text{Laplace}}{\underset{\text{3. Zeile}}{=}}$$

$$= (1 - \lambda) \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda) \cdot \underbrace{\left[ \left( \tfrac{1}{2} - \lambda \right)^2 + \tfrac{3}{4} \right]}_{>0}$$

nicht vollständig in Linearfaktoren zerfällt.