

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“ — Lösungsvorschlag —

37. Die gegebene Ebene $E = \langle v_1, v_2 \rangle$ mit den beiden (linear unabhängigen) Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

besitzt das orthogonale Komplement

$$E^\perp = \langle v_3 \rangle \quad \text{mit} \quad v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

und folglich die Darstellung

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}.$$

Für $x \in \mathbb{R}^3$ betrachten wir die Zerlegung

$$x = \underbrace{u}_{\in E} + \underbrace{\tilde{u}}_{\in E^\perp} \quad \text{mit} \quad \tilde{u} = \lambda \cdot v_3 \quad \text{für ein} \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

woraus wegen

$$u = x - \lambda \cdot v_3 = \begin{pmatrix} x_1 + 2\lambda \\ x_2 - 2\lambda \\ x_3 - \lambda \end{pmatrix} \in E$$

zunächst

$$-2(x_1 + 2\lambda) + 2(x_2 - 2\lambda) + (x_3 - \lambda) = 0,$$

also

$$-2x_1 + 2x_2 + x_3 = 9\lambda \quad \text{und damit} \quad \lambda = \frac{1}{9}(-2x_1 + 2x_2 + x_3)$$

folgt. Somit ist

$$\begin{aligned} s_E(x) &= u - \tilde{u} = (x - \lambda \cdot v_3) - \lambda \cdot v_3 = x - 2\lambda \cdot v_3 \\ &= \begin{pmatrix} x_1 - \frac{2}{9} \cdot (-2x_1 + 2x_2 + x_3) \cdot (-2) \\ x_2 - \frac{2}{9} \cdot (-2x_1 + 2x_2 + x_3) \cdot 2 \\ x_3 - \frac{2}{9} \cdot (-2x_1 + 2x_2 + x_3) \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} x_1 + 8x_2 + 4x_3 \\ 8x_1 + x_2 - 4x_3 \\ 4x_1 - 4x_2 + 7x_3 \end{pmatrix} = A \cdot x \end{aligned}$$

mit

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 8 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

38. Es wird der euklidische \mathbb{R}^4 mit dem Standardskalarprodukt \circ betrachtet.

a) Die beiden gegebenen Vektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^4$ sind gemäß

$$v_1 \circ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 0$$

orthogonal, so daß der davon erzeugte Untervektorraum $U = \langle v_1, v_2 \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$ die Orthonormalbasis

$$b_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \frac{1}{\|v_2\|} v_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

besitzt. Mit der Hilfsmatrix $B = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$ gilt ferner

$$U^\perp = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid B^\top x = 0\},$$

und wegen

$$B^\top = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{I+II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis des orthogonalen Komplements U^\perp von U in \mathbb{R}^4 ; wir unterwerfen diese dem Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren und erhalten

$$a_3 = v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \|a_3\| = \sqrt{3}, \quad \text{also} \quad b_3 = \frac{1}{\|a_3\|} \cdot a_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

sowie

$$a_4 = v_4 - (v_4 \circ b_3) \cdot b_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-3}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit

$$\|a_4\| = \sqrt{3}, \quad \text{also} \quad b_4 = \frac{1}{\|a_4\|} \cdot a_4 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

so daß b_3, b_4 wegen $\langle b_3, b_4 \rangle = \langle v_3, v_4 \rangle$ eine Orthonormalbasis von U^\perp ist. Insgesamt ist b_1, b_2, b_3, b_4 eine Orthonormalbasis von (\mathbb{R}^4, \circ) .

b) Für die Spiegelung $s_U : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ am Untervektorraum $U \subseteq \mathbb{R}^4$ gilt

$$s_U(b_1) = b_1 \quad \text{und} \quad s_U(b_2) = b_2 \quad \text{für} \quad b_1, b_2 \in U$$

sowie

$$s_U(b_3) = -b_3 \quad \text{und} \quad s_U(b_4) = -b_4 \quad \text{für} \quad b_3, b_4 \in U^\perp;$$

für die Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ von s_U gilt demnach

$$A \cdot b_1 = b_1, \quad A \cdot b_2 = b_2 \quad \text{sowie} \quad A \cdot b_3 = -b_3, \quad A \cdot b_4 = -b_4,$$

und mit den beiden Hilfsmatrizen

$$P = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in O_4(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad Q = (b_1, b_2, -b_3, -b_4) \in O_4(\mathbb{R})$$

ergibt sich

$$A \cdot P = A \cdot (b_1, b_2, b_3, b_4) = (A \cdot b_1, A \cdot b_2, A \cdot b_3, A \cdot b_4) = (b_1, b_2, -b_3, -b_4) = Q,$$

also

$$\begin{aligned} A &= Q \cdot P^{-1} \stackrel{P \in O_4(\mathbb{R})}{=} Q \cdot P^\top = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in O_4(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

39. a) Die gegebene Matrix

$$S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

ist gemäß

$$S \cdot S^\top = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3$$

orthogonal sowie gemäß $S^T = S$ auch symmetrisch; damit beschreibt S eine Spiegelung im \mathbb{R}^3 am Eigenraum $U = \text{Eig}(S, 1)$ von S zum Eigenwert $\lambda = 1$.
Wegen

$$S - 1 \cdot E_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1-3 & -2 & -2 \\ -2 & 1-3 & -2 \\ -2 & -2 & 1-3 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{3}{2} \cdot \text{III}]{-\frac{3}{2} \cdot \text{I, II}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}-\text{I}]{\text{II}-\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist

$$\dim U = 3 - \text{Rang}(S - 1 \cdot E_3) = 3 - 1 = 2;$$

damit ist U eine Ebene, und es gilt

$$U = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

b) Die Einträge auf der Hauptdiagonale der gegebenen Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

stimmen mit ihren Eigenwerten $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$ und $\lambda_3 = 2$ überein. Ferner ist die Matrix $S \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ gemäß a) sowohl symmetrisch als auch orthogonal, so daß die zu betrachtende Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ gemäß

$$A = S \cdot D \cdot S \underset{S^T=S}{=} S^T \cdot D \cdot S \underset{S^{-1}=S^T}{=} S^{-1} \cdot D \cdot S$$

zur Matrix D ähnlich ist; folglich besitzt A dieselben Eigenwerte wie D , also $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$ und $\lambda_3 = 2$.

40. a) Die gegebene Ebene $E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$ besitzt das orthogonale Komplement

$$E^\perp = \langle \tilde{u}_E \rangle \quad \text{mit} \quad \tilde{u}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Für $x \in \mathbb{R}^3$ betrachten wir die Zerlegung

$$x = \underbrace{u}_{\in E} + \underbrace{\lambda \cdot \tilde{u}_E}_{\in E^\perp} \quad \text{für ein} \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

woraus wegen

$$u = x - \lambda \cdot \tilde{u}_E = \begin{pmatrix} x_1 - 2\lambda \\ x_2 + \lambda \\ x_3 + \lambda \end{pmatrix} \in E$$

zunächst

$$2(x_1 - 2\lambda) - (x_2 + \lambda) - (x_3 + \lambda) = 0, \quad \text{also} \quad 2x_1 - x_2 - x_3 = 6\lambda,$$

und damit $\lambda = \frac{1}{6}(2x_1 - x_2 - x_3)$ folgt. Somit ist

$$\begin{aligned}\sigma(x) = x - 2\lambda \tilde{u}_E &= \begin{pmatrix} x_1 - \frac{2}{6}(2x_1 - x_2 - x_3) \cdot 2 \\ x_2 - \frac{2}{6}(2x_1 - x_2 - x_3) \cdot (-1) \\ x_3 - \frac{2}{6}(2x_1 - x_2 - x_3) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 \\ \frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 \\ \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 \end{pmatrix} = A_\sigma \cdot x\end{aligned}$$

mit

$$A_\sigma = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Des weiteren besitzt die gegebene Gerade

$$g = \mathbb{R} \cdot u_g \quad \text{mit} \quad u_g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

das orthogonale Komplement $g^\perp = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 - x_3 = 0\}$. Für $x \in \mathbb{R}^3$ betrachten wir die Zerlegung

$$x = \underbrace{\mu \cdot u_g}_{\in g} + \underbrace{\tilde{u}}_{\in g^\perp} \quad \text{für ein} \quad \mu \in \mathbb{R},$$

woraus wegen

$$\tilde{u} = x - \mu \cdot u_g = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - \mu \\ x_3 + \mu \end{pmatrix} \in g^\perp$$

zunächst

$$(x_2 - \mu) - (x_3 + \mu) = 0, \quad \text{also} \quad x_2 - x_3 = 2\mu,$$

und damit $\mu = \frac{1}{2}(x_2 - x_3)$ folgt. Somit ist

$$\delta(x) = 2\mu u_g - x = \begin{pmatrix} (x_2 - x_3) \cdot 0 - x_1 \\ (x_2 - x_3) \cdot 1 - x_2 \\ (x_2 - x_3) \cdot (-1) - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_3 \\ -x_2 \end{pmatrix} = A_\delta \cdot x$$

mit

$$A_\delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Hintereinanderausführung $\varphi = \sigma \circ \delta$ besitzt damit die Abbildungsmatrix

$$A = A_\sigma \cdot A_\delta = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Die Abbildungsmatrix A von φ ist wegen

$$A^T A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3$$

orthogonal und wegen $A^T = A$ symmetrisch; folglich ist φ die Orthogonal-
spiegelung in (\mathbb{R}^3, \circ) am Unterraum

$$U = \text{Eig}(A; 1) \quad \text{mit} \quad U^\perp = \text{Eig}(A; -1).$$

Wegen

$$A - 1 \cdot E_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $\text{Rang}(A - E_3) = 1$, also $\dim \text{Eig}(A; 1) = 2$; folglich ist U eine Ebene, und
es gilt

$$U = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$