# Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“ — Lösungsvorschlag —

33. a) Die gegebene Matrix

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

ist wegen

$$A^\top A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

orthogonal und besitzt dabei die Gestalt der Spiegelungsmatrix

$$S_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \cos\varphi = \tfrac{3}{5} \quad \text{und} \quad \sin\varphi = -\tfrac{4}{5}.$$

Damit ist der Endomorphismus $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = A \cdot x$, eine Geradenspiegelung in $(\mathbb{R}^2, \circ)$ mit dem Eigenraum $\mathrm{Eig}(A;1)$ von $A$ zum Eigenwert 1 als Spiegelachse $a$; wegen

$$A - 1 \cdot E_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{8}{5} \end{pmatrix} \underset{(-5)\cdot \mathrm{II}}{\overset{(-5)\cdot \mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II}-2\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$a = \mathrm{Eig}(A;1) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Die gegebene Spiegelachse

$$b = \mathbb{R} \cdot v \qquad \text{mit} \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

besitzt die Lotgerade

$$b^\perp = \mathbb{R} \cdot v^\perp \qquad \text{mit} \qquad v^\perp = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für die Geradenspiegelung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x) = B \cdot x$, an der Spiegelachse $b$ gilt nun

$$g(v) = v, \ \text{also} \ B \cdot v = v, \quad \text{und} \quad g\left(v^\perp\right) = -v^\perp \ \text{also} \ B \cdot v^\perp = -v^\perp,$$

so daß sich

$$B \cdot \left(v,\ v^{\perp}\right) = \left(B \cdot v,\ B \cdot v^{\perp}\right) = \left(v,\ -v^{\perp}\right)$$

und damit

$$\begin{aligned} B = \left(v,\ -v^{\perp}\right) \cdot \left(v,\ v^{\perp}\right)^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \tfrac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \end{aligned}$$

ergibt.

c) Die Hintereinanderausführung $g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ der beiden Endomorphismen $g$ und $f$ besitzt die Abbildungsmatrix

$$C = B \cdot A = \tfrac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \tfrac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{25} \begin{pmatrix} 0 & 25 \\ -25 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit stimmt $C$ mit der Drehmatrix

$$D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \text{für} \qquad \varphi = \tfrac{3\pi}{2}$$

überein; damit beschreibt $g \circ f$ eine Drehung um den Winkel $\varphi = \frac{3\pi}{2}$.

34. a) Eine orthogonale Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(v) = w$ bildet den zu $v = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}$ senkrechten Vektor

$$v^{\perp} = \begin{pmatrix} -11 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \text{der Länge} \qquad \|v^{\perp}\| = \sqrt{(-11)^2 + 7^2} = \sqrt{170}$$

auf einen zu $w = \begin{pmatrix} -13 \\ 1 \end{pmatrix}$ senkrechten Vektor $x$ (wegen der Winkeltreue) der Länge $\|x\| = \sqrt{170}$ (wegen der Längentreue) ab; damit ist aber

$$f(v^{\perp}) = \pm w^{\perp} \qquad \text{mit} \qquad w^{\perp} = \begin{pmatrix} -1 \\ -13 \end{pmatrix}.$$

Für $f_1 = \ell_{A_1}$ mit $f_1(v) = w$ und $f_1(v^{\perp}) = w^{\perp}$ gilt

$$A_1 \cdot (v, v^{\perp}) = (A_1 \cdot v, A_1 \cdot v^{\perp}) = (w, w^{\perp})$$

und damit

$$\begin{aligned} A_1 = (w, w^{\perp}) \cdot (v, v^{\perp})^{-1} &= \begin{pmatrix} -13 & -1 \\ 1 & -13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -11 \\ 11 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \\ = \begin{pmatrix} -13 & -1 \\ 1 & -13 \end{pmatrix} \cdot \tfrac{1}{170} \begin{pmatrix} 7 & 11 \\ -11 & 7 \end{pmatrix} &= \tfrac{1}{170} \begin{pmatrix} -80 & -150 \\ 150 & -80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{17} & -\frac{15}{17} \\ \frac{15}{17} & -\frac{8}{17} \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

und für $f_2 = \ell_{A_2}$ mit $f_2(v) = w$ und $f_2(v^\perp) = -w^\perp$ gilt

$$A_2 \cdot (v, v^\perp) = (A_2 \cdot v, A_2 \cdot v^\perp) = (w, -w^\perp)$$

und damit

$$A_2 = (w, -w^\perp) \cdot (v, v^\perp)^{-1} = \begin{pmatrix} -13 & 1 \\ 1 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -11 \\ 11 & 7 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} -13 & 1 \\ 1 & 13 \end{pmatrix} \cdot \tfrac{1}{170} \begin{pmatrix} 7 & 11 \\ -11 & 7 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{170} \begin{pmatrix} -102 & -136 \\ -136 & 102 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

man sieht sofort, daß $A_1$ und $A_2$ orthogonale Matrizen und folglich $f_1$ und $f_2$ orthogonale Abbildungen sind.

Alternativ kann man auch die allgemeine Gestalt

$$D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad S_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$$

orthogonaler $2 \times 2$–Matrizen ansetzen und $\varphi \in \mathbb{R}$ so bestimmen, daß

$$D_\varphi \cdot v = w \qquad \text{bzw.} \qquad S_\varphi \cdot v = w$$

erfüllt ist. Für $D_\varphi$ ergibt sich dabei

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ also } \begin{array}{rcrcr} 7\cos\varphi & - & 11\sin\varphi & = & -13 \\ 7\sin\varphi & + & 11\cos\varphi & = & 1 \end{array}$$

woraus man durch $7 \cdot (\mathrm{I}) + 11 \cdot (\mathrm{II})$

$$170\cos\varphi = -80, \qquad \text{also} \qquad \cos\varphi = -\tfrac{8}{17},$$

sowie durch $11 \cdot (\mathrm{I}) - 7 \cdot (\mathrm{II})$

$$-170\sin\varphi = -150, \qquad \text{also} \qquad \sin\varphi = \tfrac{15}{17},$$

zusammen also

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{17} & -\frac{15}{17} \\ \frac{15}{17} & -\frac{8}{17} \end{pmatrix},$$

erhält; für $S_\varphi$ ergibt sich dagegen

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ also } \begin{array}{rcrcr} 7\cos\varphi & + & 11\sin\varphi & = & -13 \\ 7\sin\varphi & - & 11\cos\varphi & = & 1 \end{array}$$

woraus man durch $7 \cdot (\mathrm{I}) - 11 \cdot (\mathrm{II})$

$$170\cos\varphi = -102, \qquad \text{also} \qquad \cos\varphi = -\tfrac{3}{5},$$

sowie durch $11 \cdot (\mathrm{I}) + 7 \cdot (\mathrm{II})$

$$170\sin\varphi = -136, \qquad \text{also} \qquad \sin\varphi = -\tfrac{4}{5},$$

zusammen also

$$A_2 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix},$$

erhält; Man überprüft sofort, daß $A_1$ und $A_2$ orthogonale Matrizen und folglich $f_1$ und $f_2$ orthogonale Abbildungen sind, die $v$ auf $w$ abbilden.

b) Wegen $\det(A_1) = 1$ ist $f_1$ orientierungstreu; $f_1$ bildet ja das Rechtssystem $v$, $v^\perp$ auf das Rechtssystem $w$, $w^\perp$ ab. Die Abbildung $f_1$ beschreibt eine Drehung um den Ursprung, wobei für den Drehwinkel $\varphi$ gilt $\cos\varphi = -\frac{8}{17}$.
Wegen $\det(A_2) = -1$ ist $f_2$ orientierungsumkehrend; $f_2$ bildet ja das Rechtssystem $v$, $v^\perp$ auf das Linkssystem $w$, $-w^\perp$ ab. Die Abbildung $f_2$ beschreibt eine Achsenspiegelung mit der Spiegelachse $\mathbb{R} \cdot a = \mathrm{Eig}(A_2; 1)$; wegen

$$A_2 - E_2 = \begin{pmatrix} -\frac{8}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \underset{10\cdot\mathrm{II}}{\overset{(-5)\cdot\mathrm{I}}{\leadsto}} \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -8 & -4 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II+I}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist etwa $a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

35. a) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\chi_S(\lambda) = \det(S - \lambda \cdot E_2) = \begin{vmatrix} -7-\lambda & 24 \\ 24 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (-7-\lambda)(7-\lambda) - 24^2 =$$
$$= \left(-49 + \lambda^2\right) - 576 = \lambda^2 - 625 = \lambda^2 - 25^2 = (\lambda - 25)(\lambda + 25);$$

damit besitzt $S$ die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 25$ und $\lambda_2 = -25$. Wegen

$$S - \lambda_1 \cdot E_2 = \begin{pmatrix} -32 & 24 \\ 24 & -18 \end{pmatrix} \underset{\frac{1}{6}\cdot\mathrm{II}}{\overset{\frac{1}{8}\cdot\mathrm{I}}{\leadsto}} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II+I}}{\leadsto} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(S; \lambda_1 = 25)$, und damit sind die vom Nullvektor verschiedenen skalaren Vielfachen $\alpha \cdot u_1 = \begin{pmatrix} 3\alpha \\ 4\alpha \end{pmatrix}$ von $u_1$ mit $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ genau die Eigenvektoren der Matrix $S$ zum Eigenwert $\lambda_1 = 25$. Des weiteren ist wegen

$$S - \lambda_2 \cdot E_2 = \begin{pmatrix} 18 & 24 \\ 24 & 32 \end{pmatrix} \underset{\frac{1}{8}\cdot\mathrm{II}}{\overset{\frac{1}{6}\cdot\mathrm{I}}{\leadsto}} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II-I}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$u_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(S; \lambda_1 = -25)$, und damit sind die vom Nullvektor verschiedenen skalaren Vielfachen $\beta \cdot u_2 = \begin{pmatrix} -4\beta \\ 3\beta \end{pmatrix}$ von $u_2$ mit $\beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ genau die Eigenvektoren der Matrix $S$ zum Eigenwert $\lambda_1 = -25$.

b) Die Matrix $A = \frac{1}{25} S \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist wegen

$$A^\top \cdot A = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{625}\begin{pmatrix} 625 & 0 \\ 0 & 625 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

orthogonal und besitzt die Determinante

$$\det(A) = \frac{1}{25^2} \cdot \begin{vmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{vmatrix} = \frac{1}{625}\left((-7)\cdot 7 - 24 \cdot 24\right) = \frac{1}{625} \cdot (-625) = -1.$$

Damit ist $A = \frac{1}{25}S$ eine Spiegelungsmatrix in der orthogonalen Gruppe $O_2(\mathbb{R})$ und beschreibt damit die Achsenspiegelung am Eigenraum $\mathrm{Eig}(A;1)$ zum Eigenwert 1; der Vektor $u_1$ aus a) ist wegen

$$A \cdot u_1 = \left(\frac{1}{25} S\right) \cdot u_1 = \frac{1}{25} \cdot (S \cdot u_1) \underset{\text{a)}}{=} \frac{1}{25} \cdot (25 \cdot u_1) = \left(\frac{1}{25} \cdot 25\right) \cdot u_1 = 1 \cdot u_1$$

ein Eigenvektor von $A$ zum Eigenwert 1, und damit ergibt sich für die Spiegelungsachse $a = \mathrm{Eig}(A;1) = \mathbb{R} \cdot u_1$.

36. Die gesuchte Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ der linearen Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

die die Spiegelung an der Geraden $g$ mit der Gleichung $2x - y = 0$ beschreibt, läßt sich auf verschiedenen Wegen ermitteln:

- Die gegebene Gerade $g$ mit der Gleichung $2x - y = 0$ besitzt den Normalenvektor $\widetilde{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Der Lotfußpunkt $p_0$ des Punktes $p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ auf der Geraden $g$ besitzt (als Punkt auf der Lotgeraden von $p$ auf $g$) die Gestalt

$$p_0 = p + \lambda \cdot \widetilde{u} = \begin{pmatrix} x + 2\lambda \\ y - \lambda \end{pmatrix}$$

mit einen geeigneten $\lambda \in \mathbb{R}$, wobei sich wegen $p_0 \in g$ dann

$$2\,(x + 2\lambda) - (y - \lambda) = 0, \qquad \text{also} \qquad \lambda = -\frac{2x - y}{5},$$

und somit

$$p_0 = \begin{pmatrix} x + 2\left(-\frac{2x-y}{5}\right) \\ y - \left(-\frac{2x-y}{5}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y \\ \frac{2}{5}x + \frac{4}{5}y \end{pmatrix}$$

ergibt; der Bildpunkt $f(p)$ des Punktes $p$ unter der Spiegelung $f$ an der Geraden $g$ ist demnach

$$f(p) = \underbrace{p + (p_0 - p)}_{=p_0} + (p_0 - p) = 2\,p_0 - p =$$

$$= 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y \\ \frac{2}{5}x + \frac{4}{5}y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y \\ \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \end{pmatrix}.$$

Für die Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ von $f$ ergibt sich wegen

$$f(p) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y \\ \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \cdot p$$

demnach

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

- Die gegebene Gerade $g$ mit der Gleichung $2x - y = 0$ besitzt den Richtungsvektor $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sowie den Normalenvektor $\widetilde{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Für die Spiegelung $f$ an der Geraden $g$ gilt nun

$$f(u) = u \qquad \text{und} \qquad f\left(\widetilde{u}\right) = -\widetilde{u},$$

so daß sich für die Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ von $f$ damit

$$A \cdot u = u \qquad \text{und} \qquad A \cdot \widetilde{u} = -\widetilde{u}$$

ergibt; mit den Matrizen

$$B = \begin{pmatrix} u, & \widetilde{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad C = \begin{pmatrix} u, & -\widetilde{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

erhält man also

$$A \cdot B = A \cdot \begin{pmatrix} u, & \widetilde{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cdot u, & A \cdot \widetilde{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u, & -\widetilde{u} \end{pmatrix} = C.$$

Wegen $\det(B) = -5 \neq 0$ ist die Matrix $B$ invertierbar, und für die gesuchte Abbildungsmatrix $A$ erhält man

$$A = C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

- Da die gegebene lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Spiegelung an der Ursprungsgeraden $g$ beschreibt, besitzt ihre Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Gestalt einer Spiegelungsmatrix

$$A = S_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2\left(\mathbb{R}\right)$$

mit einem geeigneten Parameter $\varphi \in \mathbb{R}$. Die Gerade $g$ mit der Gleichung $2x - y = 0$ besitzt nun den Richtungsvektor $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, und für diesen gilt $f(u) = u$ und damit

$$A \cdot u = u, \qquad \text{also} \qquad \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Für das resultierende lineare Gleichungssystem (in $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$)

$$\text{(I)} \quad \cos\varphi + 2\sin\varphi = 1 \qquad \text{und} \qquad \text{(II)} \quad \sin\varphi - 2\cos\varphi = 2$$

ergibt sich über „$\text{(I)} - 2 \cdot \text{(II)}$“ zum einen $5\cos\varphi = -3$, also $\cos\varphi = -\frac{3}{5}$, und über „$2 \cdot \text{(I)} + \cdot \text{(II)}$“ zum anderen $5\sin\varphi = 4$, also $\sin\varphi = \frac{4}{5}$, insgesamt also

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$