MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2020
Blatt 7
26.06.2020

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“ — Lösungsvorschlag —

25. a) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= \det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3-\lambda & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{3. Spalte}}{=} \\
&= (-3-\lambda)\cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{I}-\text{II}}{\underset{\text{III}+2\cdot\text{II}}{=}} \\
&= -(\lambda+3)\cdot \begin{vmatrix} 3-\lambda & \lambda-3 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 6-2\,\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix} \overset{(\lambda-3)\text{ aus I}}{\underset{(\lambda-3)\text{ aus III}}{=}} \\
&= -(\lambda+3)\,(\lambda-3)^2\cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} (\lambda+3)^2\,(\lambda-3)^2;
\end{aligned}$$

damit besitzt A die beiden doppelten Eigenwerte $\lambda_1 = -3$ und $\lambda_2 = 3$.

b) Wegen

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \underset{\text{IV}\cdot\frac{1}{2}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{II}-5\cdot\text{I}}{\underset{\text{III}+\text{I}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{III}+\text{II}}{\underset{\text{II}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ eine Basis von $\mathrm{Eig}(A;\lambda_1)$, und wegen $v_1 \perp v_2$ ist

$$b_1 = \frac{1}{\|v_1\|}\cdot v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \frac{1}{\|v_2\|}\cdot v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis von $\operatorname{Eig}(A;\lambda_1)$. Wegen

$$A-\lambda_2 E=\begin{pmatrix}-1&-1&0&2\\-1&-1&0&2\\0&0&-6&0\\2&2&0&-4\end{pmatrix}\underset{\mathrm{IV}+2\cdot\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}-\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow\begin{pmatrix}-1&-1&0&2\\0&0&0&0\\0&0&-6&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\underset{\mathrm{III}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)}{\overset{\mathrm{I}\cdot(-1)}{\rightsquigarrow}}\begin{pmatrix}1&1&0&-2\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

ist $v_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $v_4=\begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ eine Basis von $\operatorname{Eig}(A;\lambda_2)$, und mit dem Gram–Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren ergibt sich

$$a_3=v_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\quad\text{mit}\quad\|a_3\|=\sqrt{2},\quad\text{also}\quad b_3=\frac{1}{\|a_3\|}\cdot a_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},$$

sowie

$$a_4=v_4-(v_4\circ b_3)\cdot b_3=\begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{-2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

mit

$$\|a_4\|=\sqrt{3},\quad\text{also}\quad b_4=\frac{1}{\|a_4\|}\cdot a_4=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix};$$

wegen $\langle b_3,b_4\rangle=\langle v_3,v_4\rangle$ ist b_3, b_4 eine Orthonormalbasis von $\operatorname{Eig}(A;\lambda_2)$.

c) Mit der orthogonalen Matrix

$$P=(b_1,b_2,b_3,b_4)=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\1&0&0&0\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&0&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\in\mathrm{O}_4(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_2)=\begin{pmatrix}-3&0&0&0\\0&-3&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{4\times 4}$$

gilt dann $P^\top A\,P=D$.

26. Die gegebene 4×4–Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

ist gemäß $A^\top = A$ symmetrisch und damit orthogonal diagonalisierbar.

a) Für $\lambda_1 = -2$ ist

$$A - \lambda_1 \cdot E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-\text{I, IV}-\text{I}}{\overset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also

$$\operatorname{Rang}(A - \lambda_1 \cdot E_4) = 1 < 4;$$

damit ist $\lambda_1 = -2$ ein Eigenwert von A, und

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist eine Basis des Eigenraums $\operatorname{Eig}(A; \lambda_1)$. Für $\lambda_2 = 2$ ist

$$\begin{aligned} A - \lambda_2 \cdot E_4 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} &\underset{\text{I}\leftrightarrow\text{IV}}{\rightsquigarrow} \\ \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{IV}+3\cdot\text{I}}{\overset{\text{II}-\text{I, III}-\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & -8 & 4 & 4 \end{pmatrix} &\underset{\text{IV}+2\cdot\text{II}}{\overset{\text{III}-\text{II}}{\rightsquigarrow}} \\ \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \underset{\text{IV}+\text{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}&, \end{aligned}$$

also

$$\operatorname{Rang}(A - \lambda_2 \cdot E_4) = 3 < 4;$$

damit ist $\lambda_2 = 2$ ein Eigenwert von A, und

$$u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(A;\lambda_2)$. Damit ist u_1, u_2, u_3, u_4 bereits eine Basis von $\mathbb{R}^4$ aus Eigenvektoren von A, so daß A keinen weiteren Eigenwert besitzen kann; dieser würde ja einen weiteren linear unabhängigen Eigenvektor beisteuern.

b) Wir konstruieren für jeden der beiden Eigenräume jeweils eine Orthonormalbasis (bezüglich des Standardskalarprodukts)

Für den Eigenraum $\mathrm{Eig}(A,\lambda_1)$ unterwerfen wir die in a) ermittelte Basis dem Gram–Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren und erhalten

$$a_1 = u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \|a_1\| = \sqrt{2}, \quad \text{also} \quad b_1 = \frac{1}{\|a_1\|} \cdot a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

damit

$$a_2 = u_2 - (u_2 \circ b_1) \cdot b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit

$$\|a_2\| = \frac{1}{2}\sqrt{6}, \quad \text{also} \quad b_2 = \frac{1}{\|a_2\|} \cdot a_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und damit

$$\begin{aligned} a_3 &= u_3 - (u_3 \circ b_1) \cdot b_1 - (u_3 \circ b_2) \cdot b_2 = \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit

$$\|a_3\| = \sqrt{12}, \quad \text{also} \quad b_3 = \frac{1}{\|a_3\|} \cdot a_3 = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix};$$

damit ist b_1, b_2, b_3 eine Orthonormalbasis von $\mathrm{Eig}(A;\lambda_1)$. Der Basisvektor u_4 von $\mathrm{Eig}(A;\lambda_2)$ ist dagegen nur zu normieren mit

$$\|u_4\| = 2, \quad \text{also} \quad b_4 = \frac{1}{\|u_4\|} \cdot u_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist b_1, b_2, b_3, b_4 eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$ aus Eigenvektoren der Matrix A, und mit der orthogonalen Matrix

$$P = (b_1, b_2, b_3, b_4) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_4(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

ergibt sich dann $P^\top A P = D$.

27. a) Zu betrachten ist der von den beiden gegebenen Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

aufgespannte Unterraum $U = \langle u_1, u_2 \rangle$ im $\mathbb{R}^4$; dazu sei $B = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^{4\times 2}$. Das orthogonale Komplement $U^\perp$ von U im euklidischen $\mathbb{R}^4$ (versehen mit dem Standardskalarprodukt $\circ$) stimmt wegen

$$\begin{aligned} x \in U^\perp \quad & \Longleftrightarrow \quad u \perp x \ \text{ für alle } \ u \in U \\ & \underset{U=\langle u_1,u_2\rangle}{\Longleftrightarrow} \quad u_1 \perp x \ \text{ und } \ u_2 \perp x \\ & \Longleftrightarrow \quad u_1 \circ x = 0 \ \text{ und } \ u_2 \circ x = 0 \\ & \Longleftrightarrow \quad u_1^\top \cdot x = 0 \ \text{ und } \ u_2^\top \cdot x = 0 \\ & \Longleftrightarrow \quad B^\top \cdot x = 0 \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit dem Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems $B^\top \cdot x = 0$ mit der Koeffizientenmatrix $B^\top \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ überein. Dementsprechend bilden wegen

$$B^\top = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{\frac{1}{2}\mathrm{I} \leftrightarrow \frac{1}{2}\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{I}+2\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

die beiden Vektoren

$$w_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis des orthogonalen Komplements $U^\perp$ von U im $\mathbb{R}^4$.

b) Für das Erzeugendensystem u_1, u_2 von U mit $\|u_1\| = 6$ und $\|u_2\| = 6$ gilt

$$u_1 \circ u_2 = 0 \cdot 4 + 2 \cdot (-4) + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 0 = 0$$

also $u_1 \perp u_2$; folglich bilden die normierten Vektoren

$$v_1 = \frac{1}{\|u_1\|} \cdot u_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\1\\2\\2\end{pmatrix}, \qquad v_2 = \frac{1}{\|u_2\|} \cdot u_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis von U. Ferner unterwerfen wir die Basis w_2, w_1 von $U^\perp$ dem Gram–Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren und erhalten

$$a_1 = w_2 = \begin{pmatrix}-2\\-2\\0\\1\end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \|a_1\| = 3, \quad \text{also} \quad b_1 = \frac{1}{\|a_1\|} \cdot a_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\-2\\0\\1\end{pmatrix},$$

und damit

$$a_2 = w_1 - (w_1 \circ b_1) \cdot b_1 = \begin{pmatrix}-5\\-4\\2\\0\end{pmatrix} - \frac{18}{3} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\-2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\2\\-2\end{pmatrix}$$

mit

$$\|a_2\| = 3, \quad \text{also} \quad b_2 = \frac{1}{\|a_2\|} \cdot a_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\\-2\end{pmatrix};$$

damit ist b_1, b_2 eine Orthonormalbasis von $U^\perp$.

c) Eine reelle Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann symmetrisch, wenn sie orthogonal diagonalisierbar ist, es also eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^n, \circ)$ aus Eigenvektoren von A gibt; es ist hier $n = 4$.

In a) wird $U^\perp$ als orthogonales Komplement von U in $\mathbb{R}^4$ konstruiert, und in b) werden v_1, v_2 bzw. b_1, b_2 als Orthonormalbasis von U bzw. $U^\perp$ berechnet; damit ist v_1, v_2, b_1, b_2 eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^4, \circ)$, die nun aus Eigenvektoren von A zum Eigenwert -1 bzw. 2 bestehen soll.

Mit der orthogonalen Matrix

$$P = (v_1, v_2, b_1, b_2) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0 & 2 & -2 & -1\\1 & -2 & -2 & 0\\2 & 1 & 0 & 2\\2 & 0 & 1 & -2\end{pmatrix} \in \mathrm{O}_4(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \mathrm{diag}(-1, -1, 2, 2) = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\0 & -1 & 0 & 0\\0 & 0 & 2 & 0\\0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

ergibt sich $P^\top AP = D$, also

$$\begin{aligned}
A = PDP^\top &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0 & 2 & -2 & -1\\ 1 & -2 & -2 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 1 & -2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \cdot P^\top\\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0 & -2 & -4 & -2\\ -1 & 2 & -4 & 0\\ -2 & -1 & 0 & 4\\ -2 & 0 & 2 & -4\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 2\\ 2 & -2 & 1 & 0\\ -2 & -2 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 2 & -2\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{9}\begin{pmatrix}6 & 12 & -6 & 0\\ 12 & 3 & 0 & -6\\ -6 & 0 & 3 & -12\\ 0 & -6 & -12 & 6\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 4 & -2 & 0\\ 4 & 1 & 0 & -2\\ -2 & 0 & 1 & -4\\ 0 & -2 & -4 & 2\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

28. a) Die gegebene Matrix

$$A = \begin{pmatrix}9 & 2\\ 2 & 6\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

ist symmetrisch und damit orthogonal diagonalisierbar. Wegen

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_2) = \begin{vmatrix}9-\lambda & 2\\ 2 & 6-\lambda\end{vmatrix} =\\
= (9-\lambda)(6-\lambda) - 2\cdot 2 = \lambda^2 - 15\lambda + 50 = (\lambda - 5)(\lambda - 10)
\end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt A genau die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 5$ und $\lambda_2 = 10$; wegen

$$A - \lambda_1 E_2 = \begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

ist $v_1 = \begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 5$, und wegen

$$A - \lambda_2 E_2 = \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -4\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

ist $v_2 = \begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 10$. Folglich ist

$$w_1 = \frac{1}{\|v_1\|}\cdot v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}, \quad w_2 = \frac{1}{\|v_2\|}\cdot v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^2, \circ)$ aus Eigenvektoren für A.

b) Gemäß a) ergibt sich für die orthogonale Matrix

$$P = (w_1, w_2) = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$$

und die Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1,\ \lambda_2) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

die Beziehung $P^{-1} \cdot A \cdot P = D$.

c) Mit Hilfe der Beziehung aus b) ergibt sich zunächst

$$A = \left(P \cdot P^{-1}\right) \cdot A \cdot \left(P \cdot P^{-1}\right) = P \cdot \left(P^{-1} \cdot A \cdot P\right) \cdot P^{-1} = P \cdot D \cdot P^{-1};$$

wir zeigen nun $A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion:
„$n = 1$“:

$$A^1 = A = P \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot D^1 \cdot P^{-1}.$$

„$n \to n+1$“:

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \cdot A = \left(P \cdot D^n \cdot P^{-1}\right) \cdot \left(P \cdot D \cdot P^{-1}\right) = \\ &= P \cdot D^n \cdot \left(P^{-1} \cdot P\right) \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot D^n \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot D^{n+1} \cdot P^{-1}. \end{aligned}$$

d) Wegen

$$D^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 10^n \end{pmatrix} = 5^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

und

$$P^{-1} = P^\top = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ergibt sich mit Hilfe von c)

$$\begin{aligned} A^n &= P \cdot D^n \cdot P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot 5^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{5^n}{5} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix} -1 & 2^{n+1} \\ 2 & 2^n \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 5^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 2^{n+2}+1 & 2^{n+1}-2 \\ 2^{n+1}-2 & 2^n+4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$