MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2020
Blatt 6
19.06.2020

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“ — Lösungsvorschlag —

21. a) Für $B = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ gilt

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}-3\cdot\mathrm{I},\ \mathrm{IV}-4\cdot\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}-2\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II}\leftrightarrow\mathrm{III}}{\overset{\mathrm{I}+\mathrm{III},\ \mathrm{IV}-\mathrm{III}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit sind v_1, v_2 linear unabhängig mit $v_3 = 3\,v_1 - 2\,v_2$; insbesondere ist v_1, v_2 eine Basis von $U = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

b) Für $C = (v_1, v_2, e_1, e_2) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ gilt

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{3. Spalte}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{3. Spalte}}{=} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Damit ist die Matrix $C \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ invertierbar; insbesondere bilden die Spalten v_1, v_2, e_1, e_2 von C eine Basis von $\mathbb{R}^4$.

c) Für $D = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ gilt

$$D^\top = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II}-\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{I}+3\cdot\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Damit sind

$$w_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis des orthogonalen Komplements $U^\perp$ von $U = \langle v_1, v_2 \rangle$ in $\mathbb{R}^4$. Unterwirft man diese dem Gram–Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren, so erhält man

$$a_1 = w_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \|a_1\| = \sqrt{5}, \quad \text{also} \quad b_1 = \frac{1}{\|a_1\|} \cdot a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und damit

$$a_2 = w_2 - (w_2 \circ b_1) \cdot b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

mit

$$\|a_2\| = \frac{1}{5}\sqrt{55}, \quad \text{also} \quad b_2 = \frac{1}{\|a_2\|} \cdot a_2 = \frac{1}{\sqrt{55}} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\langle b_1, b_2 \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle$ bilden die Vektoren b_1, b_2 eine Orthonormalbasis von $U^\perp$ bezüglich des Standardskalarprodukts $\circ$ auf $\mathbb{R}^4$.

22. Wir betrachten den euklidischen $\mathbb{R}^4$, versehen mit dem Standardskalarprodukt $\circ$.

a) Der Unterraum $E \subseteq \mathbb{R}^4$ ist als Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{array}$$

gegeben; mit Hilfe der zugehörigen Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{II}-\text{I}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \underset{\text{I}+\frac{1}{2}\text{II}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

ergibt sich über die beiden freien Variablen x_3 und x_4 die Basis

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

von E. Wegen

$$v_1 \circ v_2 = (-1) \cdot 0 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

gilt schon $v_1 \perp v_2$, so daß

$$b_1 = \frac{1}{\|v_1\|}\, v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \frac{1}{\|v_2\|}\, v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis von E bezüglich $\circ$ ist.

b) Zum Unterraum $E = \langle v_1, v_2 \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$ gemäß a) betrachten wir die Hilfsmatrix $B = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^{4\times 2}$; damit stimmt das orthogonale Komplement $E^\perp$ von E in $(\mathbb{R}^4, \circ)$ mit dem Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems

$$B^\top \cdot x = 0 \qquad \text{mit} \qquad B^\top = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 4}$$

überein. Über die beiden freien Variablen x_3 und x_4 ergibt sich nun die Basis

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

von $E^\perp$; wegen

$$v_3 \circ v_4 = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

gilt schon $v_3 \perp v_4$, so daß

$$b_3 = \frac{1}{\|v_3\|}\, v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_4 = \frac{1}{\|v_4\|}\, v_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis von $E^\perp$ bezüglich $\circ$ ist.

c) Gemäß a) ist b_1, b_2 eine Orthonormalbasis von E bezüglich $\circ$, und gemäß b) ist b_3, b_4 eine Orthonormalbasis von $E^\perp$ bezüglich $\circ$; damit ist b_1, b_2, b_3, b_4 eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^4, \circ)$, mithin

$$T = (b_1, b_2, b_3, b_4) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_4(\mathbb{R})$$

eine orthogonale Matrix. Zu betrachten ist nun die Orthogonalprojektion

$$P_E : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \quad P_E(x) = M\,x$$

auf den Unterraum $E \subseteq \mathbb{R}^4$ mit der Abbildungsmatrix $M \in \mathbb{R}^{4\times 4}$; wegen

$$\begin{array}{lclclclclcl}
P_E(b_1) & \underset{b_1 \in E}{=} & b_1 & = & 1 \cdot b_1 & + & 0 \cdot b_2 & + & 0 \cdot b_3 & + & 0 \cdot b_4 \\
P_E(b_2) & \underset{b_2 \in E}{=} & b_2 & = & 0 \cdot b_1 & + & 1 \cdot b_2 & + & 0 \cdot b_3 & + & 0 \cdot b_4 \\
P_E(b_3) & \underset{b_3 \in E^\perp}{=} & 0 & = & 0 \cdot b_1 & + & 0 \cdot b_2 & + & 0 \cdot b_3 & + & 0 \cdot b_4 \\
P_E(b_4) & \underset{b_4 \in E^\perp}{=} & 0 & = & 0 \cdot b_1 & + & 0 \cdot b_2 & + & 0 \cdot b_3 & + & 0 \cdot b_4
\end{array}$$

besitzt P_E bezüglich der Basis b_1, b_2, b_3, b_4 von $\mathbb{R}^4$ die darstellende Matrix

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

in Diagonalgestalt, und über den Basiswechsel ergibt sich

$$D = T^{-1} M T \qquad \text{bzw.} \qquad M = T D T^{-1}.$$

23. Im euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^3$, versehen mit dem Standardskalarprodukt, sind

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

gegeben. Wir ermitteln zuerst die notwendige Gestalt einer orthogonalen Matrix

$$Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$$

mit der gewünschten Eigenschaft

$$(*) \qquad Q\,(a + \lambda\, b) = -a + \lambda\, b \qquad \text{für alle} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

und stützen uns dabei auf die Tatsache, daß für die Zeilen z_1, z_2, z_3 von Q die Spaltenvektoren $z_1^\top$, $z_2^\top$, $z_3^\top$ eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^3, \circ)$ bilden.

Für $\lambda = 0$ in $(*)$ ergibt sich $Q\,a = -a$, also

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und damit} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

woraus man zunächst

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

erhält; wegen der Normiertheit von $z_1^\top$, $z_2^\top$, $z_3^\top$ folgt zum einen

$$1 = \left\| z_1^\top \right\|^2 = (-1)^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 \qquad \text{bzw.} \qquad a_{12}^2 + a_{13}^2 = 0,$$

wegen

$$a_{12} = a_{13} = 0 \qquad \text{also schon} \qquad Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

sowie zum anderen

$$1 = \left\| z_2^\top \right\|^2 = 0^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 \qquad \text{bzw.} \qquad a_{22}^2 + a_{23}^2 = 1,$$

und

$$1 = \left\| z_3^\top \right\|^2 = 0^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 \qquad \text{bzw.} \qquad a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1.$$

Für $\lambda = 1$ in $(*)$ ergibt sich $Q\,(a + b) = -a + b$, also

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und damit} \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ a_{22} + a_{23} \\ a_{32} + a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

woraus man

$$a_{22} + a_{23} = 1 \qquad \text{und} \qquad a_{32} + a_{33} = 1$$

erhält. Wegen

$$1 = (a_{22} + a_{23})^2 = a_{22}^2 + 2\, a_{22}\, a_{23} + a_{23}^2 = \left(a_{22}^2 + a_{23}^2\right) + 2\, a_{22}\, a_{23} = 1 + 2\, a_{22}\, a_{23}$$

gilt $a_{22}\, a_{23} = 0$, woraus

$$\left(a_{22} = 0 \quad \text{und damit} \quad a_{23} = 1\right) \quad \text{oder} \quad \left(a_{23} = 0 \quad \text{und damit} \quad a_{22} = 1\right)$$

folgt; da $z_2^\top$ und $z_3^\top$ orthogonal sind, gilt

$$0 = z_2^\top \circ z_3^\top = 0 \cdot 0 + a_{22} \cdot a_{32} + a_{23} \cdot a_{33},$$

wodurch sich im ersten Fall

$$0 = 0 \cdot a_{32} + 1 \cdot a_{33} = a_{33} \quad \text{und damit} \quad a_{32} = 1$$

und im zweiten Fall

$$0 = 1 \cdot a_{32} + 0 \cdot a_{33} = a_{32} \quad \text{und damit} \quad a_{33} = 1$$

ergibt. Damit kommen nur die beiden Matrizen

$$Q_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad Q_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in Frage, und wir haben zu überprüfen, ob sie alle gewünschten Eigenschaften aufweisen. Da die Spalten $-e_1$, e_3, e_2 von Q_1 und $-e_1$, e_2, e_3 von Q_2 jeweils eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^3, \circ)$ bilden, sind Q_1 und Q_2 orthogonale Matrizen; für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt ferner

$$Q_1\,(a + \lambda\, b) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = -a + \lambda\, b$$

und

$$Q_2\,(a + \lambda\, b) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = -a + \lambda\, b.$$

24. Es ist der $\mathbb{R}$–Vektorraum $V = \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$ aller reellen Polynome p mit $\mathrm{Grad}(p) \leq 2$ sowie die Abbildung

$$\sigma : \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad \sigma(f, g) = f(0)\, g(0) + f(1)\, g(1) + f(2)\, g(2),$$

zu betrachten; es ist also

$$\sigma(f, g) = \sum_{i=0}^{2} f(i)\, g(i) \qquad \text{für alle} \quad f,\, g \in \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R}).$$

a) Wir zeigen anhand der Definition, daß σ ein Skalarprodukt auf $\mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$ ist, indem wir nachweisen, daß σ bilinear, symmetrisch und positiv definit ist:

- Für alle $f,\ f_1,\ f_2,\ g \in \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\sigma(f_1+f_2,g) &= \sum_{i=0}^{2}(f_1+f_2)(i)\,g(i) = \\ &= \sum_{i=0}^{2}(f_1(i)+f_2(i))\,g(i) = \sum_{i=0}^{2}(f_1(i)\,g(i)+f_2(i)\,g(i)) = \\ &= \sum_{i=0}^{2} f_1(i)\,g(i) + \sum_{i=0}^{2} f_2(i)\,g(i) = \sigma(f_1,g)+\sigma(f_2,g)\end{aligned}$$

  und

$$\begin{aligned}\sigma(\lambda\cdot f,g) &= \sum_{i=0}^{2}(\lambda\cdot f)(i)\,g(i) = \sum_{i=0}^{2}(\lambda\cdot f(i))\,g(i) = \\ &= \sum_{i=0}^{2}\lambda\cdot(f(i)\,g(i)) = \lambda\cdot\sum_{i=0}^{2} f(i)\,g(i) = \lambda\cdot\sigma(f,g);\end{aligned}$$

  damit ist σ linear im 1. Argument.
  Für alle $f,\ g,\ g_1,\ g_2 \in \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt ferner

$$\begin{aligned}\sigma(f,g_1+g_2) &= \sum_{i=0}^{2} f(i)\,(g_1+g_2)(i) = \\ &= \sum_{i=0}^{2} f(i)\,(g_1(i)+g_2(i)) = \sum_{i=0}^{2}(f(i)\,g_1(i)+f(i)\,g_2(i)) = \\ &= \sum_{i=0}^{2} f(i)\,g_1(i) + \sum_{i=0}^{2} f(i)\,g_2(i) = \sigma(f,g_1)+\sigma(f,g_2)\end{aligned}$$

  und

$$\begin{aligned}\sigma(f,\lambda\cdot g) &= \sum_{i=0}^{2} f(i)\,(\lambda\cdot g)(i) = \sum_{i=0}^{2} f(i)\,(\lambda\cdot g(i)) = \\ &= \sum_{i=0}^{2}\lambda\cdot(f(i)\,g(i)) = \lambda\cdot\sum_{i=0}^{2} f(i)\,g(i) = \lambda\cdot\sigma(f,g);\end{aligned}$$

  damit ist σ linear auch im 2. Argument, insgesamt also bilinear.

- Für alle $f,\ g \in \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$ gilt

$$\sigma(f,g) = \sum_{i=0}^{2} f(i)\,g(i) = \sum_{i=0}^{2} g(i)\,f(i) = \sigma(g,f);$$

  damit ist σ symmetrisch.

- Für alle $f \in \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$ gilt

$$\sigma(f, f) = \sum_{i=0}^{2} f(i)\, f(i) = \sum_{i=0}^{2} \underbrace{(f(i))^2}_{\geq 0} \geq 0,$$

und aus $\sigma(f, f) = 0$ folgt

$$\sum_{i=0}^{2} \underbrace{(f(i))^2}_{\geq 0} = 0, \qquad \text{also} \qquad f(0) = 0,\ f(1) = 0,\ f(2) = 0;$$

damit besitzt in diesem Fall das Polynom f mit $\mathrm{Grad}(f) \leq 2$ mindestens drei Nullstellen, und damit ergibt sich $f = 0$. Damit ist σ positiv definit.

b) Wir unterwerfen die Standardbasis $p_1 = 1$, $p_2 = X$, $p_3 = X^2$ von $\mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$ bezüglich des Skalarprodukts σ von a) dem Gram–Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren und erhalten

- zunächst $\quad a_1 = p_1 = 1 \quad$ mit

$$\sigma(a_1, a_1) = \sum_{i=0}^{2} (a_1(i))^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3,$$

also

$$\|a_1\| = \sqrt{\sigma(a_1, a_1)} = \sqrt{3},$$

und damit

$$b_1 = \frac{1}{\|a_1\|} \cdot a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

- dann $\quad a_2 = p_2 - \sigma(p_2, b_1) \cdot b_1 \quad$ mit

$$\sigma(p_2, b_1) = \sum_{i=0}^{2} p_2(i)\, b_1(i) = 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3},$$

also

$$a_2 = p_2 - \sigma(p_2, b_1) \cdot b_1 = X - \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = X - 1,$$

mit

$$\sigma(a_2, a_2) = \sum_{i=0}^{2} (a_2(i))^2 = (-1)^2 + 0^2 + 1^2 = 2,$$

also

$$\|a_2\| = \sqrt{\sigma(a_2, a_2)} = \sqrt{2},$$

und damit

$$b_2 = \frac{1}{\|a_2\|} \cdot a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (X - 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} X - \frac{1}{\sqrt{2}},$$

- und schließlich $\quad a_3 = p_3 - \sigma(p_3, b_1) \cdot b_1 - \sigma(p_3, b_2) \cdot b_2 \quad$ mit

  $$\sigma(p_3, b_1) = \sum_{i=0}^{2} p_3(i)\, b_1(i) = 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

  und

  $$\sigma(p_3, b_2) = \sum_{i=0}^{2} p_3(i)\, b_2(i) = 0 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 1 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2},$$

  also

  $$\begin{aligned} a_3 &= p_3 - \sigma(p_3, b_1) \cdot b_1 - \sigma(p_3, b_2) \cdot b_2 \\ &= X^2 - \frac{5}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\, X - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= X^2 - \frac{5}{3} - (2\,X - 2) = X^2 - 2\,X + \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

  mit

  $$\sigma(a_3, a_3) = \sum_{i=0}^{2} (a_3(i))^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{6}{9},$$

  also

  $$\|a_3\| = \sqrt{\sigma(a_3, a_3)} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

  und damit

  $$b_3 = \frac{1}{\|a_3\|} \cdot a_3 = \frac{3}{\sqrt{6}} \cdot \left(X^2 - 2\,X + \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{\sqrt{6}}\, X^2 - \sqrt{6}\, X + \frac{1}{\sqrt{6}};$$

  folglich ist b_1, b_2, b_3 eine Orthonormalbasis von $\mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$ bezüglich σ.