MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2020
Blatt 5
12.06.2020

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“ — Lösungsvorschlag —

17. Die beiden gegebenen Vektoren

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

sind offensichtlich linear unabhängig und damit eine Basis von $W = \langle w_1, w_2 \rangle$. Die Anwendung des Gram–Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens liefert dann im ersten Schritt $\|w_1\| = \sqrt{3}$ und damit

$$b_1 = \frac{1}{\|w_1\|} \cdot w_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie im zweiten Schritt

$$a_2 = w_2 - (w_2 \circ b_1) \cdot b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{9}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

mit $\|a_2\| = \sqrt{3}$ und damit

$$b_2 = \frac{1}{\|a_2\|} \cdot a_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix};$$

wegen $\langle b_1, b_2 \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle$ bilden damit b_1, b_2 eine Orthonormalbasis von W. Für die Orthogonalprojektion $P : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ auf den Unterraum W gilt damit

$$P(x) = (x \circ b_1) \cdot b_1 + (x \circ b_2) \cdot b_2$$

für alle $x \in \mathbb{R}^4$. Mit

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \qquad \text{sowie} \qquad b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

erhält man demnach

$$
\begin{aligned}
x \circ b_1 &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \circ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} &&= \frac{x_1 - x_3 + x_4}{\sqrt{3}} \\
x \circ b_2 &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \circ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} &&= \frac{x_2 - x_3 - x_4}{\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

und damit

$$
\begin{aligned}
P(x) &= (x \circ b_1) \cdot b_1 + (x \circ b_2) \cdot b_2 \\
&= \frac{x_1 - x_3 + x_4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x_2 - x_3 - x_4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - x_3 + x_4 \\ 0 \\ -(x_1 - x_3 + x_4) \\ x_1 - x_3 + x_4 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 - x_3 - x_4 \\ -(x_2 - x_3 - x_4) \\ -(x_2 - x_3 - x_4) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - x_3 + x_4 \\ x_2 - x_3 - x_4 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 \\ x_1 - x_2 + 2x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

also

$$
P(x) = x \qquad \text{mit} \qquad A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4};
$$

damit ist $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ die gesuchte Abbildungsmatrix von P.

18. a) Die durch

$$
\begin{aligned}
\sigma(x, y) = x_1\, y_1 + 3\, x_2\, y_2 + 4\, x_3\, y_3 + \\
+ x_1\, y_2 + x_2\, y_1 + x_1\, y_3 + x_3\, y_1 + x_2\, y_3 + x_3\, y_2
\end{aligned}
$$

für alle $x,\, y \in \mathbb{R}^3$ gegebene Bilinearform $\sigma : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ auf dem reellen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ besitzt die Matrixdarstellung

$$
\sigma(x, y) = x^\top A y \qquad \text{mit} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.
$$

Wegen $A^\top = A$ ist die Matrix A und damit auch die Bilinearform σ symmetrisch. Da die drei Hauptminoren

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad \text{und} \qquad \det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2$$

sowie

$$\det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \underset{\text{III}-\text{I}}{\overset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \underset{\text{matrix}}{\overset{\text{Dreiecks-}}{=}} 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

alle positiv sind, ist nach dem Hauptminorenkriterium von Hurwitz auch die Matrix A und damit auch die Bilinearform σ positiv definit.

b) Es ist

$$U = \mathbb{R} \cdot v_1 + \mathbb{R} \cdot v_2 \subseteq \mathbb{R}^3$$

mit den (offensichtlich linear unabhängigen) Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Anwendung des Gram–Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens liefert dann im ersten Schritt

$$a_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \|a_1\| = \sqrt{\sigma(a_1, a_1)} = \sqrt{2}$$

und damit

$$b_1 = \frac{1}{\|a_1\|} \cdot a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sowie im zweiten Schritt

$$a_2 = v_2 - \sigma(v_2, b_1) \cdot b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit

$$\|a_2\| = \sqrt{\sigma(a_2, a_2)} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

und damit

$$b_2 = \frac{1}{\|a_2\|} \cdot a_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\mathbb{R} \cdot b_1 + \mathbb{R} \cdot b_2 = \mathbb{R} \cdot v_1 + \mathbb{R} \cdot v_2$$

bilden die Vektoren b_1, b_2 eine Orthonormalbasis von U bezüglich des gegebenen Skalarprodukts σ auf $\mathbb{R}^3$.

19. a) Da A eine symmetrische Matrix ist, stellt σ_A eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^3$ dar; da die drei Hauptminoren

$$\det(A_1) = \left|4\right| = 4 \qquad \text{und} \qquad \det(A_2) = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 4 = 4$$

sowie

$$\det(A_3) = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} (16 + 0 + 0) - (0 + 4 + 8) = 4$$

alle positiv sind, ist nach dem Hauptminorenkriterium von Hurwitz auch die Matrix A und damit auch die symmetrische Bilinearform σ_A positiv definit, folglich ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$.

b) Es ist

$$\begin{aligned} \|e_1\| &= \sqrt{\sigma_A(e_1, e_1)} = \sqrt{4} = 2, \\ \|e_2\| &= \sqrt{\sigma_A(e_2, e_2)} = \sqrt{2} \quad \text{und} \\ \|e_3\| &= \sqrt{\sigma_A(e_3, e_3)} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \cos\sphericalangle(e_1, e_2) &= \frac{\sigma_A(e_1, e_2)}{\|e_1\| \cdot \|e_2\|} = \frac{-2}{2 \cdot \sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}, \\ \cos\sphericalangle(e_1, e_3) &= \frac{\sigma_A(e_1, e_3)}{\|e_1\| \cdot \|e_3\|} = \frac{0}{2 \cdot \sqrt{2}} = 0 \quad \text{und} \\ \cos\sphericalangle(e_2, e_3) &= \frac{\sigma_A(e_2, e_3)}{\|e_2\| \cdot \|e_3\|} = \frac{-1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

also

$$\sphericalangle(e_1, e_2) = \frac{3\pi}{4} \text{ (bzw. } 135^\circ\text{)}, \qquad \sphericalangle(e_1, e_3) = \frac{\pi}{2} \text{ (bzw. } 90^\circ\text{)}$$

und

$$\sphericalangle(e_2, e_3) = \frac{2\pi}{3} \text{ (bzw. } 120^\circ\text{)}.$$

c) Wir unterwerfen die Standardbasis e_1, e_2, e_3 von $\mathbb{R}^3$ dem Gram–Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren und erhalten zunächst

$$a_1 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \|a_1\| = \sqrt{\sigma_A(a_1, a_1)} = 2,$$

also

$$b_1 = \frac{1}{\|a_1\|} \cdot a_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

danach

$$a_2 = e_2 - \sigma_A(e_2, b_1) \cdot b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-2}{2} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit

$$\|a_2\| = \sqrt{\sigma_A(a_2, a_2)} = 1, \quad \text{also} \quad b_2 = \frac{1}{\|a_2\|} \cdot a_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und schließlich

$$\begin{aligned} a_3 = e_3 - \sigma_A(e_3, b_1) \cdot b_1 - \sigma_A(e_3, b_2) \cdot b_2 &= \\ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{0}{2} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - (-1) \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit

$$\|a_3\| = \sqrt{\sigma_A(a_3, a_3)} = 1, \quad \text{also} \quad b_3 = \frac{1}{\|a_3\|} \cdot a_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Folglich bilden die Vektoren b_1, b_2, b_3 eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^3, \sigma_A)$.

d) Mit

$$B = (b_1, b_2, b_3) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$$

leistet die invertierbare Matrix

$$P = B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$$

das Gewünschte.

20. Eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann symmetrisch, wenn $M^\top = M$ gilt, und genau dann orthogonal, wenn $M^\top \cdot M = E_n$ (oder gleichwertig $M \cdot M^\top = E_n$) ist.

a) Die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

sind (wegen $\det(A) = -1$ und $\det(B) = -1$) invertierbar und symmetrisch, ihr Produkt

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist allerdings nicht symmetrisch.

b) Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ besitzt die Gestalt $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ mit Koeffizienten a, b, $c \in \mathbb{R}$, und für die zu A inverse Matrix gilt dann

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix};$$

folglich ist auch A^{-1} symmetrisch.

c) Es ist

$$\left(C^\top AC\right)^\top = C^\top A^\top (C^\top)^\top \underset{A^\top = A}{=} C^\top AC;$$

folglich ist $C^\top AC$ eine symmetrische Matrix.

d) Es ist

$$\begin{aligned}(A \cdot B)^\top \cdot (A \cdot B) = \left(B^\top \cdot A^\top\right) \cdot (A \cdot B) = B^\top \cdot \left(A^\top \cdot A\right) \cdot B \underset{A^\top \cdot A = E_2}{=} \\ = B^\top \cdot E_2 \cdot B = B^\top \cdot B = E_2;\end{aligned}$$

damit ist auch $A \cdot B$ eine orthogonale Matrix.

e) Es ist

$$\left(A^{-1}\right)^\top \cdot A^{-1} \underset{A^{-1} = A^\top}{=} \left(A^{-1}\right)^\top \cdot A^\top = \left(A \cdot A^{-1}\right)^\top = E_2^\top = E_2;$$

damit ist auch A^{-1} eine orthogonale Matrix.

f) Die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

sind (wegen $\det(A) = 1$ und $\det(C) = 2$) invertierbar; darüber hinaus ist A (als Einheitsmatrix) sogar orthogonal, aber die Matrix

$$C^\top AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

ist etwa wegen $\det(C^\top AC) = 4$, also $\det(C^\top AC) \neq \pm 1$, nicht orthogonal.

Damit sind die Aussagen a) und f) falsch, die Aussagen b) bis e) dagegen wahr.