Dr. E. Schörner

## Übungen zur Vorlesung "Lineare Algebra und analytische Geometrie II" — Lösungsvorschlag —

13. a) Zu betrachten ist die durch  $\sigma_B(x,y) = x^{\top} B y$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}^3$  mit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

definierte Bilinearform des  $\mathbb{R}^3$ ; zunächst ist wegen  $B^{\top} = B$  die Matrix B und damit auch die Bilinearform  $\sigma_B$  symmetrisch. Da die drei Hauptminoren

$$\det(B_1) = \det(1) = 1 > 0,$$

$$\det(B_2) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1 > 0,$$

$$\det(B_3) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} = (12 + 6 + 6) - (8 + 9 + 6) = 1 > 0$$

positiv sind, ist nach dem Hauptminorenkriterium von Hurwitz die symmetrische Matrix B und damit auch die Bilinearform  $\sigma_B$  positiv definit; folglich ist  $\sigma_B$  ein Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^3$ .

b) Es ist

$$\sigma_B(e_1, e_1) = e_1^{\top} B e_1 = 1,$$
 also  $||e_1|| = \sqrt{\sigma_B(e_1, e_1)} = 1,$ 

und

$$\sigma_B(e_2, e_2) = e_2^{\top} B e_2 = 2,$$
 also  $||e_2|| = \sqrt{\sigma_B(e_2, e_2)} = \sqrt{2},$ 

sowie

$$\sigma_B(e_1, e_2) = e_1^{\mathsf{T}} B e_2 = 1,$$

so daß sich für den Winkel  $\varphi$  zwischen  $e_1$  und  $e_2$  wegen

$$\cos \varphi = \frac{\sigma_B(e_1, e_2)}{\|e_1\| \cdot \|e_2\|} = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

dann  $\varphi = \frac{\pi}{4}$  bzw.  $\varphi = 45^{\circ}$  ergibt.

14. Wir betrachten die durch die Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$  gegebene Bilinearform

$$\sigma_A: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \sigma_A(x,y) = x^\top A y,$$

auf dem reellen Vektorraum  $\mathbb{R}^2$ . Für die beiden Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad B = (v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

gilt dabei:

$$\begin{array}{lll}
\sigma_{A}(v_{1}, v_{1}) = 1 & \iff & v_{1}^{\top} A v_{1} = 1 \\
\sigma_{A}(v_{1}, v_{2}) = 0 & \iff & v_{1}^{\top} A v_{2} = 0 \\
\sigma_{A}(v_{2}, v_{1}) = 0 & \iff & v_{2}^{\top} A v_{1} = 0 \\
\sigma_{A}(v_{2}, v_{2}) = 1 & \iff & v_{2}^{\top} A v_{2} = 1
\end{array} \right\} \iff B^{\top} A B = E_{2},$$

dies ist aber zu

$$A = (B^{\top})^{-1} \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & -13 \\ -13 & 5 \end{pmatrix}$$

gleichwertig.

Damit gibt es höchstens ein Skalarprodukt  $\sigma$  auf dem  $\mathbb{R}^2$ , bezüglich dem  $v_1, v_2$  eine Orthonormalbasis bilden, nämlich  $\sigma = \sigma_A$  mit der eben bestimmten Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .

Da aber A symmetrisch und wegen 34 > 0 und  $\det(A) = 1 > 0$  nach dem Hauptminorenkriterium von Hurwitz auch positiv definit ist, stellt  $\sigma_A$  tatsächlich ein Skalarprodukt auf dem  $\mathbb{R}^2$  mit den gewünschten Eigenschaften dar.

15. a) Für alle  $A, A', B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt

$$\sigma(A + A', B) = \operatorname{Spur}((A + A') B) = \operatorname{Spur}(A B + A' B) =$$
$$= \operatorname{Spur}(A B) + \operatorname{Spur}(A' B) = \sigma(A, B) + \sigma(A', B)$$

und

$$\sigma(\lambda \cdot A, B) = \operatorname{Spur}((\lambda \cdot A) B) = \operatorname{Spur}(\lambda \cdot (A B)) =$$
$$= \lambda \cdot \operatorname{Spur}(A B) = \lambda \cdot \sigma(A, B)$$

sowie

$$\sigma(A, B) = \operatorname{Spur}(A B) = \operatorname{Spur}(B A) = \sigma(B, A).$$

Da sich die nachgewiesene Linearität im ersten Argument aufgrund der gezeigten Symmetrie auch auf das zweite Argument überträgt, ist  $\sigma$  eine symmetrische Bilinearform auf V.

Ferner gilt für alle  $A, A', B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ 

$$\tau(A + A', B) = \operatorname{Spur}((A + A')^{\top}B) =$$

$$= \operatorname{Spur}((A^{\top} + A'^{\top})B) = \operatorname{Spur}(A^{\top}B + A'^{\top}B) =$$

$$= \operatorname{Spur}(A^{\top}B) + \operatorname{Spur}(A'^{\top}B) = \tau(A, B) + \tau(A', B)$$

und

$$\tau(\lambda \cdot A, B) = \operatorname{Spur}((\lambda \cdot A)^{\top} B) = \operatorname{Spur}((\lambda \cdot A^{\top}) B) =$$
$$= \operatorname{Spur}(\lambda \cdot (A^{\top} B)) = \lambda \cdot \operatorname{Spur}(A^{\top} B) = \lambda \cdot \tau(A, B)$$

sowie

$$\tau(A, B) = \operatorname{Spur}(A^{\top}B) = \operatorname{Spur}((A^{\top}B)^{\top}) = \operatorname{Spur}(B^{\top}A) = \tau(B, A).$$

Da sich erneut die nachgewiesene Linearität im ersten Argument aufgrund der gezeigten Symmetrie auch auf das zweite Argument überträgt, ist  $\tau$  eine symmetrische Bilinearform auf V.

b) Für 
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$
 gilt  $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  und damit 
$$\sigma(A, A) = \operatorname{Spur}(A^2) = -2 < 0;$$

damit ist  $\sigma$  nicht positiv definit und folglich kein Skalarprodukt auf V. Für  $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sei  $C = (c_{ij})_{i,j}$  mit  $C = A^{\top}A$ ; für alle  $k \in \{1, \dots, n\}$  gilt  $c_{kk} = a_{1k}^2 + \dots + a_{nk}^2$  und damit

$$\tau(A, A) = \operatorname{Spur}(A^{\top} A) = \operatorname{Spur}(C) = \sum_{k=1}^{n} c_{kk} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{jk}^{2} \ge 0,$$

und aus  $\tau(A, A) = 0$  folgt  $a_{jk} = 0$  für alle  $j, k \in \{1, ..., n\}$ , also A = 0. Damit ist  $\tau$  positiv definit und folglich ein Skalarprodukt auf V.

## 16. Für alle $v, w \in V$ gilt

$$||v + w||^2 = \sigma(v + w, v + w) = \sigma(v, v + w) + \sigma(w, v + w) =$$

$$= (\sigma(v, v) + \sigma(v, w)) + (\sigma(w, v) + \sigma(w, w)) = ||v||^2 + 2\sigma(v, w) + ||w||^2$$

sowie

$$||v - w||^2 = \sigma(v - w, v - w) = \sigma(v, v - w) - \sigma(w, v - w) =$$

$$= (\sigma(v, v) - \sigma(v, w)) - (\sigma(w, v) - \sigma(w, w)) = ||v||^2 - 2\sigma(v, w) + ||w||^2;$$

diese Ergebnisse finden im folgenden Verwendung.

a) Es ergibt sich

$$\begin{array}{l} \frac{1}{4} \, \|v+w\|^2 - \frac{1}{4} \, \|v-w\|^2 = \frac{1}{4} \left( \|v\|^2 + 2 \, \sigma(v,w) + \|w\|^2 \right) - \\ - \frac{1}{4} \left( \|v\|^2 - 2 \, \sigma(v,w) + \|w\|^2 \right) = \sigma(v,w). \end{array}$$

b) Es ergibt sich

$$||v + w||^2 + ||v - w||^2 = (||v||^2 - 2\sigma(v, w) + ||w||^2) + (||v||^2 + 2\sigma(v, w) + ||w||^2) = 2(||v||^2 + ||w||^2).$$

(Die Bezeichnung "Parallelogrammgleichung" erklärt sich wie folgt: Wir betrachten das von den Vektoren v und w aufgespannte Parallelogramm mit dem Eckpunkten 0, v, v+w und w. Die Seiten zwischen 0 und v sowie v+w und w besitzen jeweils die Länge  $\|v\|$ , die Seiten zwischen v und v+w sowie w und v jeweils die Länge  $\|v\|$ ; die Diagonale zwischen v und v+w mißt die Länge  $\|v+w\|$  und die Diagonale zwischen v und v die Länge  $\|v-w\|$ . Die Parallelogrammgleichung besagt also, daß die Quadrate über den vier Seiten des Parallelogramms zusammen dieselbe Fläche besitzen wie die Quadrate über den beiden Diagonalen.)

c) Es ergibt sich

$$||v + w|| = ||v - w|| \iff ||v + w||^2 = ||v - w||^2 \iff 2\sigma(v, w) = -2\sigma(v, w) \iff \sigma(v, w) = 0 \iff v \perp w.$$

d) Es ergibt sich zunächst

$$||v + w|| = ||v|| + ||w|| \iff ||v + w||^2 = (||v|| + ||w||)^2 \iff \\ \iff ||v||^2 + 2\sigma(v, w) + ||w||^2 = ||v||^2 + 2||v|| \cdot ||w|| + ||w||^2 \iff \\ \iff 2\sigma(v, w) = 2||v|| \cdot ||w|| \iff \sigma(v, w) = ||v|| \cdot ||w||;$$

damit erhält man:

$$\sigma(v,w) \geq 0 \qquad \text{und damit} \qquad |\sigma(v,w)| = \sigma(v,w) = \|v\| \cdot \|w\|,$$

woraus sich mit der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung ergibt, daß v und w linear abhängig sind; folglich ist w=0 oder  $v=\lambda\,w$  mit  $w\neq 0$  und  $\lambda\in\mathbb{R}$ , wobei

$$0 \le \sigma(v, w) = \sigma(\lambda w, w) = \lambda \sigma(w, w) = \lambda \cdot ||w||^2$$

und damit  $0 \le \lambda$  gilt.

• Für " $\Leftarrow$ " ergibt sich im Falle w = 0

$$\sigma(v, w) = 0 = ||v|| \cdot ||w||$$

sowie im Falle  $v = \lambda w$  mit  $\lambda > 0$ 

$$\begin{split} \sigma(v, w) &= \sigma(\lambda \, w, w) = \lambda \, \sigma(w, w) = \lambda \, \|w\|^2 = (\lambda \, \|w\|) \cdot \|w\| \underset{\lambda \ge 0}{=} \\ &= (|\lambda| \cdot \|w\|) \cdot \|w\| = \|\lambda \, w\| \cdot \|w\| = \|v\| \cdot \|w\|. \end{split}$$