MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2020
Blatt 3
29.05.2020

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“ — Lösungsvorschlag —

9. a) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\chi_t(\lambda) = \det(A_t - \lambda\, E_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ t & t+1-\lambda & 0 \\ t+1 & t+1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{3. Spalte}}{=}$$

$$= -(\lambda+1) \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ t & t+1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)\,(-\lambda\,(t+1-\lambda)+t) =$$

$$= -(\lambda+1)\left(\lambda^2 - t\,\lambda - \lambda + t\right) \underset{\text{Vieta}}{=} -(\lambda+1)(\lambda-t)(\lambda-1).$$

b) Die in a) gezeigte Zerlegung von χ_t in Linearfaktoren legt die folgende Fallunterscheidung nahe:

Fall 1: $t \notin \{-1, 1\}$. Die Matrix A_t besitzt die drei verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = t$ und $\lambda_3 = 1$ und ist folglich als 3×3–Matrix diagonalisierbar.

Fall 2: $t = -1$. Die Matrix A_{-1} besitzt die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 1$ mit den algebraischen Vielfachheiten $\alpha_1 = 2$ und $\alpha_2 = 1$ (und damit auch $\gamma_2 = 1$). Wegen

$$A_{-1} - \lambda_1 E_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{II+I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $r_1 = \text{Rang}(A_{-1} - \lambda_1 E_3) = 1$. Für die geometrische Vielfachheit γ_1 von λ_1 gilt damit $\gamma_1 = 3 - r_1 = 2 = \alpha_1$; folglich ist A_{-1} diagonalisierbar.

Fall 3: $t = 1$. Die Matrix A_1 besitzt die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 1$ mit den algebraischen Vielfachheiten $\alpha_1 = 1$ und $\alpha_2 = 2$. Wegen

$$A_1 - \lambda_2 E_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \underset{\text{III}+2\cdot\text{I}}{\overset{\text{II+I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \underset{\text{II}\leftrightarrow -\frac{1}{2}\cdot\text{III}}{\overset{-1\cdot\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $r_2 = \text{Rang}(A_1 - \lambda_2 E_3) = 2$. Für die geometrische Vielfachheit γ_2 von λ_2 gilt damit $\gamma_2 = 3 - r_2 = 1 < \alpha_2$; folglich ist A_1 nicht diagonalisierbar.

c) Gemäß a) besitzt die Matrix A_0 die drei verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$ und $\lambda_3 = 1$. Wegen

$$A_0 - \lambda_1 E_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-\text{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-\text{II}}{\overset{\text{I}+\frac{1}{2}\text{II}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = -1$, wegen

$$A_0 - \lambda_2 E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{I}\leftrightarrow\text{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{III}+\text{II}}{\overset{\text{I}-\text{II}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 0$, und wegen

$$A_0 - \lambda_3 E_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{\text{III}+\text{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \underset{\text{II}\leftrightarrow-\frac{1}{2}\cdot\text{III}}{\overset{-1\cdot\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_3 = 1$. Mit

$$P = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$$

und

$$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

gilt damit $P^{-1} A_0 \, P = D$.

10. Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & c & -1-c \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

in Abhängigkeit vom reellen Parameter $c \in \mathbb{R}$.

a) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt mit Hilfe elementarer Spaltenumformungen

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda\, E_3) \\
&= \begin{vmatrix} -\lambda & c & -1-c \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{II+III}}{=} \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -1-c \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -\lambda \end{vmatrix} \\
&\underset{\text{III−II}}{\overset{\text{I−II}}{=}} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -c \\ \lambda-1 & -\lambda & \lambda \\ \lambda-1 & 1-\lambda & -1 \end{vmatrix} \underset{\text{aus I}}{\overset{1-\lambda}{=}} (1-\lambda)\cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & -c \\ -1 & -\lambda & \lambda \\ -1 & 1-\lambda & -1 \end{vmatrix} \\
&\underset{\text{Sarrus}}{=} (1-\lambda)\cdot((\lambda+\lambda+c\,(1-\lambda)) - (-c\,\lambda+\lambda\,(1-\lambda)-1)) \\
&= (1-\lambda)\cdot\big((\lambda+\lambda+c-c\,\lambda) - \big(-c\,\lambda+\lambda-\lambda^2-1\big)\big) \\
&= -(\lambda-1)\cdot\big(\lambda^2+\lambda+c+1\big)\,.
\end{aligned}$$

Es ist $\lambda_1 = 1$ eine Nullstelle von χ_A und damit ein reeller Eigenwert der Matrix A; das in χ_A ferner enthaltene quadratische Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + c + 1$$

besitzt die Diskriminante

$$\Delta = 1^2 - 4\cdot(c+1) = -3 - 4\,c,$$

wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

- für $c = -\frac{3}{4}$ ist $\Delta = 0$, und damit besitzt p die doppelte reelle Nullstelle $\lambda_2 = \lambda_3 = -\frac{1}{2}$, so daß alle Eigenwerte von A reell sind.
- für $c < -\frac{3}{4}$ ist $\Delta > 0$, und damit besitzt p die beiden verschiedenen reellen Nullstellen

  $$\lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-4\,c-3} \qquad \text{und} \qquad \lambda_3 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-4\,c-3}$$

  so daß alle Eigenwerte von A reell sind.
- für $c > -\frac{3}{4}$ ist $\Delta < 0$, und damit besitzt p keine reelle Nullstelle, so daß A auch zwei konjugiert–komplexe Eigenwerte hat.

Insgesamt sind genau für $c \le -\frac{3}{4}$ alle Eigenwerte von A reell.

b) Mit Hilfe der Ergebnisse von a) treffen wir folgende Fallunterscheidung:

- Für $c > -\frac{3}{4}$ zerfällt das charakteristische Polynom χ_A nicht vollständig in reelle Linearfaktoren, und folglich ist die Matrix A nicht diagonalisierbar.
- Für $c \le -\frac{3}{4}$ zerfällt das charakteristische Polynom χ_A vollständig in reelle Linearfaktoren; damit ist die Matrix A genau dann diagonalisierbar, wenn für jeden Eigenwert λ die algebraische Vielfachheit α und die geometrische Vielfachheit γ übereinstimmen.
  Für $c < -\frac{3}{4}$ und $c \neq -3$ besitzt A die drei verschiedenen Eigenwerte

  $$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-4\,c-3} \quad \text{und} \quad \lambda_3 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-4\,c-3};$$

es ist nämlich wegen $c < -\frac{3}{4}$ zunächst $\lambda_2 \neq \lambda_3$, und ferner ist wegen $\lambda_2 < 0$ zum einen $\lambda_2 \neq 1 = \lambda_1$ und wegen $c \neq -3$ zum anderen $\lambda_3 \neq -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-4(-3)-3} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{9} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1 = \lambda_1$. Folglich gilt $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$, damit auch $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1$, so daß die Matrix A diagonalisierbar ist.
Für $c = -\frac{3}{4}$ ist $\lambda_2 = \lambda_3$, und für $c = -3$ ist $\lambda_1 = \lambda_3$; damit besitzt die Matrix A einen Eigenwert der algebraischen Vielfachheit $\alpha = 2$. Nun ist für alle $c \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{Rang}(A - \lambda\, E_3) = \operatorname{Rang}\begin{pmatrix} -\lambda & c & -1-c \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \geq 2,$$

da die letzten beiden Zeilen unabhängig von der Wahl von c und λ stets linear unabhängig sind; ist nun λ ein Eigenwert von A, so folgt für die geometrische Vielfachheit

$$1 \leq \gamma = \dim\left(\operatorname{Eig}(A,\lambda)\right) = 3 - \underbrace{\operatorname{Rang}\left(A - \lambda\, E_3\right)}_{\geq 2} \leq 1,$$

also es gilt stets $\gamma = 1$. Damit ist für $c = -\frac{3}{4}$ wegen $\lambda_2 = \lambda_3$ und damit $\alpha_2 = 2 > 1 = \gamma_2$ und für $c = -3$ wegen $\lambda_1 = \lambda_3$ und damit $\alpha_1 = 2 > 1 = \gamma_1$ die Matrix A nicht diagonalisierbar.

Insgesamt ist A genau dann diagonalisierbar, wenn $c < -\frac{3}{4}$ und $c \neq -3$ gilt.

11. Für ein Polynom

$$p(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 \in \operatorname{Pol}_3(\mathbb{R})$$

ist

$$p(X+1) = a_0 + a_1(X+1) + a_2(X+1)^2 + a_3(X+1)^3 \in \operatorname{Pol}_3(\mathbb{R});$$

die Unbestimmte X wird also durch $X+1$ ersetzt.

a) Für den gegebenen Endomorphismus

$$f : V \to V, \qquad p(X) \mapsto p(X+1)$$

des $\mathbb{R}$–Vektorraums $V = \operatorname{Pol}_3(\mathbb{R})$ ergibt sich

$$
\begin{aligned}
f(1) &\underset{a_0=1,a_1=0,a_2=0,a_3=0}{=} 1 \\
&= 1\cdot 1 + 0\cdot X + 0\cdot X^2 + 0\cdot X^3,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(X) &\underset{a_0=0,a_1=1,a_2=0,a_3=0}{=} X+1 \\
&= 1\cdot 1 + 1\cdot X + 0\cdot X^2 + 0\cdot X^3,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(X^2) &\underset{a_0=0,a_1=0,a_2=1,a_3=0}{=} (X+1)^2 \\
&= 1\cdot 1 + 2\cdot X + 1\cdot X^2 + 0\cdot X^3,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(X^3) &\underset{a_0=0,a_1=0,a_2=0,a_3=1}{=} (X+1)^3 \\
&= 1\cdot 1 + 3\cdot X + 3\cdot X^2 + 1\cdot X^3;
\end{aligned}
$$

für die darstellende Matrix M bezüglich der Standardbasis 1, X, X^2, X^3 ergibt sich damit

$$
M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.
$$

b) Der Endomorphismus $f : V \to V$ ist genau dann bijektiv, wenn seine darstellende Matrix $M \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ invertierbar ist; dies ist aber wegen $\mathrm{Rang}(M) = 4$ der Fall.

c) Der Endomorphismus $f : V \to V$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn seine darstellende Matrix $M \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ diagonalisierbar ist. Wegen

$$
\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda\, E_4) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{matrix}}{\overset{\text{Dreiecks-}}{=}} (1-\lambda)^4
$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt die Matrix M den Eigenwert $\lambda_1 = 1$ der algebraischen Vielfachheit $\alpha_1 = 4$; wegen

$$
M - \lambda_1\, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

ist $r = \mathrm{Rang}(M - \lambda_1\, E_4) = 3$ und damit die geometrische Vielfachheit von $\lambda_1 = 1$ nur $\gamma_1 = 4 - r = 1$.

Wegen $\gamma_1 < \alpha_1$ ist die Matrix M und folglich auch der Endomorphismus f nicht diagonalisierbar.

12. Wir versehen den gegebenen $\mathbb{R}$–Vektorraum $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit seiner Standardbasis

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Der gegebene Endomorphismus

$$F : V \to V, \quad F(A) = A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

besitzt wegen

$$f(A_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot A_1 + 1 \cdot A_2 + 0 \cdot A_3 + 0 \cdot A_4$$

$$f(A_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2 + 0 \cdot A_3 + 0 \cdot A_4$$

$$f(A_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2 + 0 \cdot A_3 + 1 \cdot A_4$$

$$f(A_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2 + 1 \cdot A_3 + 0 \cdot A_4$$

bezüglich der Basis A_1, A_2, A_3, A_4 von V die darstellende Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4};$$

da nun A als symmetrische Matrix insbesondere diagonalisierbar ist, ist auch der Endomorphismus F diagonalisierbar.

Wegen

$$\begin{aligned}
\chi_M(\lambda) &= \det(M - \lambda\, E_4) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{1. Zeile}}{=} \\
&= (-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{1. Zeile}}{=} \\
&= (-\lambda) \cdot (-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} - 1 \cdot 1 \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \\
&= \left(\lambda^2 - 1\right) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \left(\lambda^2 - 1\right)^2 = (\lambda - 1)^2 \cdot (\lambda + 1)^2
\end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt die darstellende Matrix M und folglich auch der Endomorphismus F die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$ jeweils der (algebraischen) Vielfachheit 2.

- Wegen
$$M - \lambda_1 E_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
ist
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(M; \lambda_1)$ der Matrix $M \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$; folglich ist B_1, B_2 mit
$$\begin{aligned} B_1 &= 1 \cdot A_1 + 1 \cdot A_2 + 0 \cdot A_3 + 0 \cdot A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ B_2 &= 0 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2 + 1 \cdot A_3 + 1 \cdot A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(F; \lambda_1)$ des Endomorphismus $F : V \to V$ zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$.
- Wegen
$$M - \lambda_2 E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
ist
$$v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(M; \lambda_2)$ der Matrix $M \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ zum Eigenwert $\lambda_2 = -1$; folglich ist B_3, B_4 mit
$$\begin{aligned} B_3 &= (-1) \cdot A_1 + 1 \cdot A_2 + 0 \cdot A_3 + 0 \cdot A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ B_4 &= 0 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2 + (-1) \cdot A_3 + 1 \cdot A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(F; \lambda_2)$ des Endomorphismus $F : V \to V$ zum Eigenwert $\lambda_2 = -1$.

Insgesamt ist also B_1, B_2, B_3, B_4 eine Basis von $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ aus Eigenvektoren von F; dies zeigt ebenfalls (ohne Rückgriff auf die Symmetrie der darstellenden Matrix M) die Diagonalisierbarkeit des Endomorphismus F von V.