Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“ — Lösungsvorschlag —

5. a) Wegen

$$\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda E_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 & 5 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ -2 & -4 & -5-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{III+I}}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 & 5 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ -\lambda & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \underset{(-\lambda)\text{ aus III}}{=} (-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 & 5 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=}$$

$$= -\lambda \cdot \left[((2-\lambda)(1-\lambda) + 4 + 0) - (5\,(1-\lambda) + 0 + 0)\right] =$$

$$= -\lambda \left[\lambda^2 - 3\lambda + 2 + 4 - 5 + 5\lambda\right] = -\lambda\left(\lambda^2 + 2\lambda + 1\right);$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ist

$$\chi_M(\lambda) = -\lambda^3 - 2\,\lambda^2 - \lambda$$

das charakteristische Polynom der gegebenen Matrix M. Wegen

$$\chi_M(\lambda) = -\lambda\left(\lambda^2 + 2\lambda + 1\right) = -\lambda\,(\lambda+1)^2$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt die Matrix M die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = -1$.

- Da $\lambda_1 = 0$ die algebraische Vielfachheit $\alpha_1 = 1$ besitzt, ist auch die geometrische Vielfachheit $\gamma_1 = 1$ und damit der Eigenraum $\mathrm{Eig}(M, \lambda_1)$ eindimensional.
- Da $\lambda_2 = -1$ die algebraische Vielfachheit $\alpha_2 = 2$ besitzt, kommt für die geometrische Vielfachheit $\gamma_2 = 1$ oder $\gamma_2 = 2$ in Frage; wegen

$$M - \lambda_2 E_3 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -4 \end{pmatrix} \underset{\text{III}+\frac{2}{3}\text{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \underset{\text{III}+\frac{2}{3}\text{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist

$$\gamma_2 = 3 - \mathrm{Rang}\,(M - \lambda_2 E_3) = 3 - 2 = 1;$$

damit ist auch der Eigenraum $\mathrm{Eig}(M, \lambda_2)$ eindimensional.

Folglich sind höchstens zwei Eigenvektoren der Matrix M, nämlich ein Eigenvektor v_1 zum Eigenwert λ_1 und ein Eigenvektor v_2 zum Eigenwert λ_2, linear unabhängig; damit existiert keine Basis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von M, und folglich ist die Matrix M nicht diagonalisierbar.

Alternativ läßt sich auch unter Verwendung des Hauptsatzes über diagonalisierbare Matrizen wie folgt argumentieren: Da für den Eigenwert $\lambda_2 = -1$ die algebraische Vielfachheit $\alpha_2 = 2$ nicht mit der geometrischen Vielfachheit $\gamma_2 = 1$ übereinstimmt, ist die Matrix M nicht diagonalisierbar. Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) \quad &= \quad \det(A - \lambda\, E_3) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 2 & 1 \\ -18 & 8-\lambda & 3 \\ 6 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&\underset{\text{I+III}}{=} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 2-\lambda \\ -18 & 8-\lambda & 3 \\ 6 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{2-\lambda}{\underset{\text{aus I}}{=}} (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -18 & 8-\lambda & 3 \\ 6 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&\underset{\text{II+3III}}{=} (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 6-3\lambda \\ 6 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{2-\lambda}{\underset{\text{aus II}}{=}} (2-\lambda)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&\underset{\text{Sarrus}}{=} (2-\lambda)^2 \cdot (1-\lambda) = -(\lambda-2)^2 \cdot (\lambda - 1);
\end{aligned}$$

damit besitzt A die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ der algebraischen Vielfachheit $\alpha_1 = 2$ und $\lambda_2 = 1$ der algebraischen Vielfachheit $\alpha_2 = 1$ (und damit auch der geometrischen Vielfachheit $\gamma_2 = 1$). Wegen

$$A - \lambda_1 E_3 = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 1 \\ -18 & 6 & 3 \\ 6 & -2 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{III+I}}{\overset{\text{II}-3\text{III}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} -6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist auch die geometrische Vielfachheit $\gamma_1 = 2$, und $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist eine Basis von $\mathrm{Eig}(A; \lambda_1)$; ferner ist wegen

$$A - \lambda_2 E_3 = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ -18 & 7 & 3 \\ 6 & -2 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{II+3III}}{\overset{\text{I+III}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{III+2II}}{\overset{\text{III}-6\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis von $\mathrm{Eig}(A; \lambda_2)$. Insgesamt ist A reell diagonalisierbar, und v_1, v_2 und v_3 ist eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^3$ bestehend aus Eigenvektoren von A.

6. a) Wegen

$$A - 1 \cdot E_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -4 & -3 \end{pmatrix} \underset{\text{IV}+3\text{I}}{\overset{\text{II}-\text{I, III}-\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-\text{II}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{III}\leftrightarrow\text{IV}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist

$$\operatorname{Rang}(A - 1 \cdot E_4) = 3 < 4;$$

folglich ist $\lambda_1 = 1$ ein Eigenwert der Matrix A mit der geometrischen Vielfachheit

$$\gamma_1 = 4 - \operatorname{Rang}(A - 1 \cdot E_4) = 1.$$

Wegen

$$A - (-1) \cdot E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -4 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{IV}-3\text{I}}{\overset{\text{II}+\text{I, III}+\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \underset{\text{II}\leftrightarrow\text{III}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-3\text{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \underset{\text{IV}-\text{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist

$$\operatorname{Rang}(A - (-1) \cdot E_4) = 3 < 4;$$

folglich ist $\lambda_2 = -1$ ein Eigenwert der Matrix A mit der geometrischen Vielfachheit

$$\gamma_2 = 4 - \operatorname{Rang}(A - (-1) \cdot E_4) = 1.$$

b) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\chi_A(\lambda) \quad = \quad \det(A - \lambda\, E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -\lambda & 1 \\ 3 & 0 & -4 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{III}-\text{II}}{=} \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & -4 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\underset{(\lambda-1)\text{ aus III}}{=} (\lambda-1)\cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -4 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Spalte}}{\underset{\text{II+III}}{=}} (\lambda-1)\cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & -4 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{3. Zeile}}{=} (\lambda-1)\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 3 & -4 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{II}-\text{I}}{=} -(\lambda-1)\cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & -4 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\underset{(\lambda-1)\text{ aus II}}{=} -(\lambda-1)\cdot(\lambda-1)\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{Sarrus}}{=} -(\lambda-1)^2\cdot[(\lambda(-2-\lambda)+0-4)-(-3+0+0)]$$

$$= (\lambda-1)^2\cdot\left(\lambda^2+2\lambda+1\right) = (\lambda-1)^2\cdot(\lambda+1)^2 .$$

c) Die Matrix A besitzt gemäß b) wegen

$$\chi_A(\lambda)=0 \iff (\lambda-1)^2\cdot(\lambda+1)^2=0 \iff \lambda=1 \text{ oder } \lambda=-1$$

genau die beiden Eigenwerte $\lambda_1=1$ und $\lambda_2=-1$, welche gemäß a) jeweils die geometrische Vielfachheit $\gamma_1=1$ und $\gamma_2=1$ besitzen. Damit gibt es höchstens zwei linear unabhängige Eigenvektoren der Matrix A, insbesondere also keine Basis von $\mathbb{R}^4$ aus Eigenvektoren von A; damit ist A nicht diagonalisierbar.

Alternativ könnte man auch mit dem Hauptsatz über diagonalisierbare Matrizen argumentieren: gemäß b) besitzen die beiden Eigenwerte $\lambda_1=1$ und $\lambda_2=-1$ jeweils die algebraische Vielfachheit $\alpha_1=2$ und $\alpha_2=2$, welche damit nicht mit der in a) bestimmten geometrischen Vielfachheit $\gamma_1=1$ und $\gamma_2=1$ übereinstimmen; $\gamma_1<\alpha_1$ wie $\gamma_2<\alpha_2$ zeigt, daß A nicht diagonalisierbar ist.

7. Die Matrix $A\in\mathbb{R}^{3\times3}$ besitzt genau dann die (vom Nullvektor verschiedenen) Vektoren $v_1,\ v_2,\ v_3\in\mathbb{R}^3$ als Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3\in\mathbb{R}$, wenn

$$A\cdot v_1=\lambda_1\cdot v_1, \qquad A\cdot v_2=\lambda_2\cdot v_2, \qquad A\cdot v_3=\lambda_3\cdot v_3,$$

zusammengefaßt

$$A\cdot(v_1,v_2,v_3)=(A\cdot v_1,A\cdot v_2,A\cdot v_3)=(\lambda_1\cdot v_1,\lambda_2\cdot v_2,\lambda_3\cdot v_3),$$

also

$$(*) \qquad A\cdot B=C$$

mit $B = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $C = (\lambda_1 \cdot v_1, \lambda_2 \cdot v_2, \lambda_3 \cdot v_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, gilt; für die hier gegebenen Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

und Zahlen $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = -1$ ergibt sich also

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \qquad \text{und} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Wegen

$$\begin{aligned}
(B \mid E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) &\underset{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\mathrm{III}+\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}-2\cdot\mathrm{I}}{\sim}} \\
\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) &\underset{(-\frac{1}{5})\cdot\mathrm{II}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\mathrm{III}-2\cdot\mathrm{II}}{\overset{\mathrm{I}-2\cdot\mathrm{II}}{\sim}} \\
\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 6 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 1 \end{array}\right) &\underset{\frac{1}{6}\cdot\mathrm{III}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{15} & \frac{1}{30} & \frac{1}{6} \end{array}\right) \underset{\mathrm{I}-\mathrm{III}}{\sim} \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{15} & \frac{1}{30} & \frac{1}{6} \end{array}\right) = (E_3 \mid B')
\end{aligned}$$

ist die Matrix $B \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ invertierbar, und es gilt

$$B^{-1} = B' = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{1}{15} & \frac{1}{30} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 10 & 5 & -5 \\ -6 & 12 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Folglich erhält man

$$(*) \qquad A \cdot B = C \iff A = C \cdot B^{-1},$$

also

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 10 & 5 & -5 \\ -6 & 12 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 2 & -14 & -10 \\ -14 & 23 & -5 \\ -10 & -5 & -25 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

8. Für fest gewählte Matrizen A, $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ betrachten wir die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad X \mapsto A \cdot X - X \cdot B;$$

diese ist gemäß den Rechenregeln für das Matrixprodukt linear.

a) Sei $x \in \mathbb{R}^2$ ein Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}^2$ ein Eigenvektor der zu B transponierten Matrix $B^\top$ zum Eigenwert $\mu \in \mathbb{R}$, es ist also

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq 0 \qquad \text{mit} \qquad A \cdot x = \lambda \cdot x$$

und

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \neq 0 \qquad \text{mit} \qquad B^\top \cdot y = \mu \cdot y.$$

Wegen $x_i \neq 0$ für ein $i \in \{1,2\}$ und $y_j \neq 0$ für ein $j \in \{1,2\}$ ist

$$X = x \cdot y^\top = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} f(X) &= A \cdot X - X \cdot B = A \cdot \left(x \cdot y^\top\right) - \left(x \cdot y^\top\right) \cdot B \\ &= (A \cdot x) \cdot y^\top - x \cdot \left(y^\top \cdot B\right) = (A \cdot x) \cdot y^\top - x \cdot \left(B^\top \cdot y\right)^\top \\ &= (\lambda \cdot x) \cdot y^\top - x \cdot (\mu \cdot y)^\top = \lambda \cdot \left(x \cdot y^\top\right) - \mu \cdot \left(x \cdot y^\top\right) \\ &= \lambda \cdot X - \mu \cdot X = (\lambda - \mu) \cdot X; \end{aligned}$$

damit ist $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ein Eigenvektor von f zum Eigenwert $\lambda - \mu$.

b) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein gemeinsamer Eigenwert der Matrizen A und B, so ist wegen

$$\begin{aligned} \chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda E_2) = \det\left((B - \lambda E_2)^\top\right) = \\ = \det(B^\top - \lambda E_2^\top) = \det(B^\top - \lambda E_2) = \chi_{B^\top}(\lambda) \end{aligned}$$

der Eigenwert λ auch ein Eigenwert von $B^\top$. Nach a) ist $\lambda - \lambda = 0$ ein Eigenwert von f, und damit gibt es eine Matrix $O \neq C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$f(C) = 0 \cdot C = O,$$

also

$$A \cdot C - C \cdot B = O \qquad \text{bzw.} \qquad A \cdot C = C \cdot B.$$