MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2020
Blatt 1
15.05.2020

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“ — Lösungsvorschlag —

1. a) Für $\lambda = -1$ gilt

$$A - \lambda \cdot E_4 \;=\; \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & -3 \\ -1 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \underset{\text{III+II, IV+II}}{\overset{\frac{1}{3}\cdot\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{II+I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\frac{1}{3}\cdot\text{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

wegen

$$\operatorname{Rang}(A - \lambda \cdot E_4) = 2 < 4$$

ist $\lambda = -1$ ein Eigenwert der Matrix A der geometrischen Vielfachheit

$$\gamma = \dim \operatorname{Eig}(A, \lambda) = 4 - \operatorname{Rang}(A - \lambda \cdot E_4) = 2,$$

wobei

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

eine Basis des Eigenraums $\operatorname{Eig}(A, -1)$ ist.

b) Für den vom Nullvektor verschiedenen Vektor $w \in \mathbb{R}^4$ gilt

$$A \cdot w = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot w;$$

damit ist w ein Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert $\mu = 2$.

c) Die Hilfsmatrix $B = (v_1, v_2, w, e_1) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ ist wegen

$$\det(B) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{4. Spalte}}{\overset{\text{Laplace}}{=}} \underbrace{(-1)^{1+4} \cdot 1}_{=-1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\underset{\text{Sarrus}}{=} -\Big((0 + 0 + (-1)) - (0 + (-1) + 1) \Big) = 1 \neq 0$$

invertierbar; damit bilden ihre Spalten v_1, v_2, w, e_1 eine Basis von $\mathbb{R}^4$.

Gemäß a) und b) gilt

$$\begin{aligned} \ell_A(v_1) &= A \cdot v_1 = \lambda \cdot v_1 = (-1) \cdot v_1 + \phantom{(-1)\cdot{}} 0 \cdot v_2 + 0 \cdot w + 0 \cdot e_1 \\ \ell_A(v_2) &= A \cdot v_2 = \lambda \cdot v_2 = \phantom{(-1)\cdot{}} 0 \cdot v_1 + (-1) \cdot v_2 + 0 \cdot w + 0 \cdot e_1 \\ \ell_A(w) &= A \cdot w = \mu \cdot w = \phantom{(-1)\cdot{}} 0 \cdot v_1 + \phantom{(-1)\cdot{}} 0 \cdot v_2 + 2 \cdot w + 0 \cdot e_1 \end{aligned}$$

und wegen

$$A \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$\ell_A(e_1) = A \cdot e_1 = 2\, e_1 + w = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 1 \cdot w + 2 \cdot e_1;$$

folglich ist

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

die darstellende Matrix von ℓ_A bezüglich der Basis v_1, v_2, w, e_1 von $\mathbb{R}^4$.

2. Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda\, E_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{Laplace}}{\underset{\text{2. Spalte}}{=}}$$

$$= (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \cdot \big[(1-\lambda) \cdot (3-\lambda) - 1 \cdot (-1)\big] =$$

$$= (2-\lambda) \cdot \big(3 - 4\,\lambda + \lambda^2 + 1\big) = (2-\lambda) \cdot \big(4 - 4\,\lambda + \lambda^2\big) = (2-\lambda)^3;$$

wegen

$$\chi_A(\lambda) = 0 \iff (2-\lambda)^3 = 0 \iff \lambda = 2$$

ist $\lambda = 2$ der einzige Eigenwert der Matrix A. Wegen

$$A - \lambda\, E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-\text{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(A;\lambda)$ der Matrix A zum Eigenwert $\lambda = 2$; die Eigenvektoren sind damit alle vom Nullvektor verschiedenen Linearkombinationen von v_1 und v_2, also alle Vektoren

$$v = \mu_1 \cdot v_1 + \mu_2 \cdot v_2 = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_1 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad (\mu_1, \mu_2) \neq (0,0).$$

Demnach sind höchstens zwei Eigenvektoren der Matrix A linear unabhängig; damit existiert keine Basis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A, und folglich ist die Matrix A nicht diagonalisierbar, also nicht ähnlich zu einer Diagonalmatrix.

3. Für das charakteristische Polynom χ_A der gegebenen Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ gilt

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) \quad &= \quad \det(A - \lambda \cdot E_4) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & -4 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&\overset{\text{Laplace}}{\underset{\text{1. Zeile}}{=}} \quad (-1)^{1+1}(-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 5 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} + (-1)^{1+4}(-4) \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&\overset{\text{Laplace}}{\underset{\text{1. Z/1. Sp}}{=}} \quad -\lambda \cdot (-1)^{1+1}(-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 5 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \quad \lambda^2 \cdot \big((-\lambda)^2 - 5 \cdot 1\big) + 4 \cdot 1^2 = (\lambda^2)^2 - 5\lambda^2 + 4 \\
&\overset{\text{Vieta}}{=} \quad \big(\lambda^2 - 1\big)\big(\lambda^2 - 4\big) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda + 2)
\end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$; damit besitzt A die vier verschiedenen reellen Eigenwerte

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 2 \quad \text{und} \quad \lambda_4 = -2$$

und ist damit als 4×4–Matrix reell diagonalisierbar.

Wegen

$$\begin{aligned}
A - \lambda_1 \cdot E_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{II+I}}{\leadsto} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{III+II}}{\leadsto} \\
\leadsto \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{IV+III}}{\leadsto} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ist $v_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$, wegen

$$\begin{aligned}
A - \lambda_2 \cdot E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{II−I}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{III−II}}{\leadsto} \\
\leadsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{IV−III}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ist $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = -1$, wegen

$$A - \lambda_3 \cdot E_4 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II}+\frac{1}{2}\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}+\frac{1}{2}\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{IV}+\frac{1}{2}\mathrm{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_3 = 2$, und wegen

$$A - \lambda_4 \cdot E_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II}-\frac{1}{2}\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}-\frac{1}{2}\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{IV}-\frac{1}{2}\mathrm{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_4 = -2$. Folglich ist v_1, v_2, v_3, v_4 eine Basis von $\mathbb{R}^4$ aus Eigenvektoren von A.

4. a) Für ein Polynom

$$p(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 \in \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$$

ist

$$p(X+1) = a_0 + a_1(X+1) + a_2(X+1)^2 + a_3(X+1)^3 \in \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$$

sowie

$$p(X-1) = a_0 + a_1(X-1) + a_2(X-1)^2 + a_3(X-1)^3 \in \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R});$$

die Unbestimmte X wird also durch $X+1$ bzw. $X-1$ ersetzt; für die lineare Abbildung

$$f : \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R}) \to \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R}), \quad p(X) \mapsto \frac{1}{2}\big(p(X+1) + p(X-1)\big),$$

ergibt sich damit für $p(X) = 1$, also mit $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, dann

$$f(1) = \frac{1}{2}\big(1 + 1\big) = 1,$$

für $p(X) = X$, also mit $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, dann

$$f(X) = \frac{1}{2}\big((X+1) + (X-1)\big) = X,$$

für $p(X) = X^2$, also mit $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 0$, dann

$$f(X^2) = \frac{1}{2}\big((X+1)^2 + (X-1)^2\big) = X^2 + 1$$

und für $p(X) = X^3$, also $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$, dann

$$f(X^3) = \frac{1}{2}\big((X+1)^3 + (X-1)^3\big) = X^3 + 3\,X.$$

Wegen

$$\begin{aligned}
f(1) &= 1\cdot 1 + 0\cdot X + 0\cdot X^2 + 0\cdot X^3\\
f(X) &= 0\cdot 1 + 1\cdot X + 0\cdot X^2 + 0\cdot X^3\\
f(X^2) &= 1\cdot 1 + 0\cdot X + 1\cdot X^2 + 0\cdot X^3\\
f(X^3) &= 0\cdot 1 + 3\cdot X + 0\cdot X^2 + 1\cdot X^3
\end{aligned}$$

ergibt sich damit für die darstellende Matrix von f bezüglich der Standardbasis 1, X, X^2, X^3 damit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

b) Wir bestimmen zunächst die Eigenwerte und die Eigenvektoren der darstellenden Matrix $M \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ des Endomorphismus $f : \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R}) \to \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$. Wegen

$$\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda\cdot E_4) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1-\lambda & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{Dreiecks–}}{\underset{\text{matrix}}{=}} (1-\lambda)^4$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt M nur den Eigenwert $\lambda = 1$, und wegen

$$M - 1\cdot E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad u_1 = \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(M; \lambda = 1)$. Dementsprechend besitzt auch f nur den einen Eigenwert $\lambda = 1$, und

$$\begin{aligned}
1\cdot 1 + 0\cdot X + 0\cdot X^2 + 0\cdot X^3 &= 1,\\
0\cdot 1 + 1\cdot X + 0\cdot X^2 + 0\cdot X^3 &= X
\end{aligned}$$

bilden eine Basis von $\mathrm{Eig}(f; \lambda = 1)$; die Eigenvektoren von f sind also genau die vom Nullpolynom verschiedenen Polynome $p \in \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ mit $\mathrm{Grad}(p) \leq 1$.