MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2020
Repetitorium
31.07.2020

Repetitorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“ — Lösungsvorschlag —

1. a) Wir betrachten eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

   - Eine reelle Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt *Eigenwert* von A, wenn es einen Vektor $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ mit $A\,x = \lambda\,x$ gibt.
   - Ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ heißt *Eigenvektor* von A, wenn $x \neq 0$ ist und es eine reelle Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $A\,x = \lambda\,x$ gibt.
   - Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *diagonalisierbar,* wenn
     – es eine Basis $b_1, \ldots, b_n$ von $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren von A gibt bzw.
     – es eine invertierbare Matrix $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ gibt, so daß $D = P^{-1}AP$ Diagonalgestalt besitzt.

   b) Für einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definiert man:

   - $x \in \mathbb{R}^n$ heißt *Eigenvektor* von A zu λ, wenn $x \neq 0$ und $A \cdot x = \lambda \cdot x$ gilt; der *Eigenraum* von A zu λ ist $\mathrm{Eig}(A;\lambda) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x = \lambda \cdot x\}$.
   - Die *algebraische Vielfachheit* von λ gibt die Vielfachheit von λ als Nullstelle im charakteristischen Polynom χ_A von A wieder; die *geometrische Vielfachheit* von λ gibt die Dimension des Eigenraums $\mathrm{Eig}(A;\lambda)$ von A zu λ an.

   Der „Hauptsatz über diagonalisierbare Matrizen“ besagt:

   - Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist genau dann (reell) diagonalisierbar, wenn zum einen das charakteristische Polynom χ_A von A komplett in (reelle) Linearfaktoren zerfällt und zum anderen für jeden Eigenwert λ von A die algebraische und die geometrische Vielfachheit übereinstimmen.

2. a) Es ist

$$A - \lambda \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}+\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}+2\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   also

$$\mathrm{Rang}(A - \lambda \cdot E_3) = 1 < 3;$$

   damit ist $\lambda = 3$ ein Eigenwert von A, und für den Eigenraum ergibt sich

$$\mathrm{Eig}(A;\lambda) = \mathbb{R} \cdot u_1 + \mathbb{R} \cdot u_2 \qquad \text{mit} \quad u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Es ist $x \neq 0$ mit

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 7 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 14 \\ 7 \end{pmatrix} = 7 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

damit ist $x \in \mathbb{R}^3$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\mu = 7$.

c) Gemäß a) sind u_1 und u_2 linear unabhängige Eigenvektoren von A zum Eigenwert $\lambda = 3$, und gemäß b) ist x ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\mu = 7$; damit sind u_1, u_2, x linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{R}^3$, wegen $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ also schon eine Basis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren der Matrix A. Folglich ist A reell diagonalisierbar, und mit der invertierbaren Matrix

$$P = (u_1, u_2, x) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \mathrm{diag}\,(\lambda, \lambda, \mu) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

ergibt sich die Beziehung $P^{-1}AP = D$.

3. Die in Abhängigkeit vom reellen Parameter $a \in \mathbb{R}$ gegebene Matrix

$$M_a = \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ 1 & a+1 & 0 \\ 0 & 1 & a+1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

besitzt zunächst die Determinante

$$\det M_a = \begin{vmatrix} 0 & -a & 0 \\ 1 & a+1 & 0 \\ 0 & 1 & a+1 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} (0+0+0) - (0+0-a(a+1)) = a(a+1),$$

und wir erhalten

$$M_a \text{ invertierbar} \iff \det M_a \neq 0 \iff a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}.$$

Ferner besitzt M_a das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} \chi_a(\lambda) \quad &= \quad \det(M_a - \lambda E_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & -a & 0 \\ 1 & a+1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & a+1-\lambda \end{vmatrix} \\ &\underset{\text{3. Spalte}}{\overset{\text{Laplace}}{=}} \quad (-1)^{3+3}(a+1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & -a \\ 1 & a+1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \quad (a+1-\lambda) \cdot \big(-\lambda(a+1-\lambda) - (-a)\big) \\ &= \quad (a+1-\lambda) \cdot \big(\lambda^2 - (a+1)\lambda + a\big) \\ &\underset{\text{Vieta}}{=} \quad -(\lambda - (a+1)) \cdot (\lambda - a) \cdot (\lambda - 1) \end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$; damit zerfällt $\chi_a(\lambda)$ komplett in Linearfaktoren, und für die Nullstellen

$$\lambda_1 = a + 1, \qquad \lambda_2 = a, \qquad \lambda_3 = 1$$

gilt stets $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sowie

$$\lambda_1 = \lambda_3 \iff a = 0 \qquad \text{und} \qquad \lambda_2 = \lambda_3 \iff a = 1,$$

wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

- Für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ besitzt M_a die drei (paarweise) verschiedenen Eigenwerte λ_1, λ_2, λ_3 und ist damit als 3×3–Matrix diagonalisierbar.
- Für $a = 0$ besitzt M_0 den Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_3 = 1$ der algebraischen Vielfachheit $\alpha_1 = 2$; wegen
$$M_0 - 1 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
ergibt sich die geometrische Vielfachheit
$$\gamma_1 = 3 - \operatorname{Rang}(M_0 - 1 \cdot E_3) = 3 - 2 = 1,$$
und wegen $\gamma_1 \neq \alpha_1$ ist M_0 nicht diagonalisierbar.
- Für $a = 1$ besitzt M_1 den Eigenwert $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ der algebraischen Vielfachheit $\alpha_2 = 2$; wegen
$$M_1 - 1 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
ergibt sich die geometrische Vielfachheit
$$\gamma_2 = 3 - \operatorname{Rang}(M_1 - 1 \cdot E_3) = 3 - 2 = 1,$$
und wegen $\gamma_2 \neq \alpha_2$ ist M_1 nicht diagonalisierbar.

Zusammenfassend ergibt sich

Matrix M_a		diagonalisierbar	
		ja	nein
invertierbar	ja	$a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$	$a = 1$
	nein	$a = -1$	$a = 0$

4. a) Die in Abhängigkeit vom Parameter $c \in \mathbb{R}$ gegebene Matrix
$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2c & c & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$
besitzt das charakteristische Polynom
$$\chi_{A_c}(\lambda) = \det(A - \lambda E_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 2\,c & c & -\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} -\lambda^3 + c\,\lambda = -\lambda(\lambda^2 - c)$$
für alle $\lambda \in \mathbb{R}$; dies motiviert die folgende Fallunterscheidung:

- Für $c < 0$ ist q mit $q(\lambda) = \lambda^2 - c$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ eine quadratische Funktion ohne (reelle) Nullstellen; damit ist $\lambda_1 = 0$ der algebraischen Vielfachheit $\alpha_1 = 1$ der einzige Eigenwert von A_c.
- Für $c = 0$ ist $\chi_{A_0}(\lambda) = -\lambda^3$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$; damit besitzt A_0 den einzigen Eigenwert $\lambda_1 = 0$ der algebraischen Vielfachheit $\alpha_1 = 3$.
- Für $c > 0$ ist $\chi_{A_c}(\lambda) = -\lambda\,(\lambda - \sqrt{c})\,(\lambda + \sqrt{c})$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$; damit besitzt A_c die drei verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \sqrt{c} > 0$ und $\lambda_3 = -\sqrt{c} < 0$ jeweils der algebraischen Vielfachheit $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$.

b) Wir treffen dieselbe Fallunterscheidung wie in a) und erhalten:

- Für $c < 0$ zerfällt das charakteristische Polynom χ_{A_c} nicht in (reelle) Linearfaktoren; damit ist A_c nicht (reell) diagonalisierbar.
- Für $c = 0$ ist $\mathrm{Rang}(A_0 - \lambda_1 E) = \mathrm{Rang}(A_0) = 1$, und damit ist $\lambda_1 = 0$ von der geometrischen Vielfachheit $\gamma_1 = 2$; wegen $\gamma_1 < \alpha_1$ ist A_0 nicht diagonalisierbar.
- Für $c > 0$ besitzt A_c drei verschiedene Eigenwerte und ist daher als 3×3–Matrix diagonalisierbar.

c) Für $c = 4$ besitzt die Matrix A_4 gemäß a) die drei verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = -2$. Wegen

$$A_4 - \lambda_1 E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 8 & 4 & 0 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II}\leftrightarrow\frac{1}{4}\mathrm{III}}{\overset{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II}-2\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ein Eigenvektor von A_4 zum Eigenwert $\lambda_1 = 0$, wegen

$$A_4 - \lambda_2 E_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 8 & 4 & -2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}+4\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}+\frac{1}{2}\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}+2\mathrm{II}}{\overset{-\frac{1}{2}\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ein Eigenvektor von A_4 zum Eigenwert $\lambda_2 = 2$, wegen

$$A_4 - \lambda_3 E_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}-4\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}-\frac{1}{2}\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}-2\mathrm{II}}{\overset{\frac{1}{2}\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ein Eigenvektor von A_4 zum Eigenwert $\lambda_3 = -2$. Mit der invertierbaren Matrix

$$P = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

ergibt sich damit $P^{-1}A_4P = D$.

5. a) Für einen Endomorphismus $f : V \to V$ eines $\mathbb{R}$–Vektorraums V sind die beiden folgenden Eigenschaften äquivalent:

- Es gibt eine Basis von V aus Eigenvektoren von f.
- f besitzt eine darstellende Matrix in Diagonalgestalt.

Damit kann die eine Bedingung zur Definition von „f ist diagonalisierbar." erhoben und die andere Bedingung als gleichwertige Charakterisierung aufgefaßt werden. Wegen $V \neq \mathbb{R}^n$ und damit $f \neq \ell_A$ ist der Rückgriff auf eine Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ allerdings nicht möglich!

b) Der Endomorphismus $f_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f_t(x) = A_t \cdot x$, ist genau dann diagonalisierbar, wenn die Abbildungsmatrix $A_t \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalisierbar ist. Wegen

$$\begin{aligned} \chi_{A_t}(\lambda) &= \det(A_t - \lambda\cdot E_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & t \\ 1 & 1-\lambda & t \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \big((1-\lambda)^2\cdot(2-\lambda) + t - t\big) - \big(t(1-\lambda) - t(1-\lambda) + (2-\lambda)\big) \\ &= (1-\lambda)^2\cdot(2-\lambda) - (2-\lambda) = \big((1-\lambda)^2 - 1\big)\cdot(2-\lambda) \\ &= (1-\lambda-1)(1-\lambda+1)\cdot(2-\lambda) = -\lambda\cdot(2-\lambda)^2 \end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt A_t die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ der algebraischen Vielfachheit $\alpha_1 = 1$ (und damit der geometrischen Vielfachheit $\gamma_1 = 1$) sowie $\lambda_2 = 2$ der algebraischen Vielfachheit $\alpha_2 = 2$ (und damit der geometrischen Vielfachheit $\gamma_2 \in \{1, 2\}$). Das charakteristische Polynom $\chi_{A_t}(\lambda)$ zerfällt komplett in Linearfaktoren mit $\gamma_1 = \alpha_1$, so daß A_t genau dann diagonalisierbar ist, wenn auch $\gamma_2 = \alpha_2$ gilt; wegen

$$A_t - 2\cdot E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & t \\ 1 & -1 & t \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{III+I}}{\overset{\text{II+I}}{\leadsto}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & t \\ 0 & 0 & 2t \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} \underset{\text{III}-\frac{1}{2}\cdot\text{II}}{\overset{\text{I}-\frac{1}{2}\cdot\text{II}}{\leadsto}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$\gamma_2 = 2 \iff \operatorname{Rang}(A_t - 2\cdot E_3) = 1 \iff t = 0.$$

Folglich ist A_t bzw. f_t genau dann diagonalisierbar, wenn $t = 0$ ist.

c) Für $t = 0$ ist die Matrix $A_0 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gemäß b) diagonalisierbar. Wegen

$$A_t - \lambda_1\cdot E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-\text{I}}{\overset{\text{II}-\text{I}}{\leadsto}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \underset{\text{II}\leftrightarrow -\frac{1}{2}\text{III}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(A_0, \lambda_1 = 0)$, und wegen

$$A_t - \lambda_2 \cdot E_3 \underset{\text{b)}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(A_0, \lambda_2 = 2)$; mit der invertierbaren Matrix

$$P = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

ergibt sich damit $P^{-1} A_0 P = D$. Dabei ist D die darstellende Matrix des Endomorphismus $f_0 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bezüglich der Basis v_1, v_2, v_3 von $\mathbb{R}^3$.

6. a) Der gegebene Endomorphismus

$$\varphi : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad \varphi(A) = A + A^\top,$$

des Vektorraums $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aller 2×2–Matrizen besitzt bezüglich der Basis

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ wegen

$$\varphi(B_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot B_1 + 0 \cdot B_2 + 0 \cdot B_3 + 0 \cdot B_4$$

$$\varphi(B_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot B_1 + 1 \cdot B_2 + 1 \cdot B_3 + 0 \cdot B_4$$

$$\varphi(B_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot B_1 + 1 \cdot B_2 + 1 \cdot B_3 + 0 \cdot B_4$$

$$\varphi(B_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 0 \cdot B_1 + 0 \cdot B_2 + 0 \cdot B_3 + 2 \cdot B_4$$

die darstellende Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

b) Die darstellende Matrix $M \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ von φ ist gemäß $M^\top = M$ symmetrisch und damit insbesondere diagonalisierbar; folglich ist auch der Endomorphismus φ diagonalisierbar. Genauer gilt: wegen

$$\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda \cdot E_4) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{1. Zeile}}{=}$$

$$= (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{3. Zeile}}{=} (2-\lambda)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)^2 \cdot \left[(1-\lambda)^2 - 1^2\right] = (2-\lambda)^2 \cdot \left[(2-\lambda)\cdot(-\lambda)\right] = -\lambda \cdot (2-\lambda)^3$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt M den dreifachen Eigenwert $\lambda_1 = 3$ und den einfachen Eigenwert $\lambda_2 = 0$; wegen

$$M - \lambda_1 \cdot E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(M, \lambda_1)$, und wegen

$$M - \lambda_2 \cdot E_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ist} \quad u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(M, \lambda_2)$. Folglich sind u_1, u_2, u_3, u_4 eine Basis von $\mathbb{R}^4$ aus Eigenvektoren von M, so daß

$$\begin{aligned} 1 \cdot B_1 + 0 \cdot B_2 + 0 \cdot B_3 + 0 \cdot B_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ 0 \cdot B_1 + 1 \cdot B_2 + 1 \cdot B_3 + 0 \cdot B_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ 0 \cdot B_1 + 0 \cdot B_2 + 0 \cdot B_3 + 1 \cdot B_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 0 \cdot B_1 + (-1) \cdot B_2 + 1 \cdot B_3 + 0 \cdot B_4 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eine Basis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aus Eigenvektoren von φ ist.

7. a) Für die gegebenen Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

betrachten wir die Hilfsmatrix $A = (v_1, v_2, w_1, w_2) \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III+I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 8 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{I-II}}{\underset{\mathrm{III-2\cdot II}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

damit sind v_1, v_2 linear unabhängig mit

$$w_1 = 2 \cdot v_1 + 3 \cdot v_2 \qquad \text{und} \qquad w_2 = 1 \cdot v_1 + 4 \cdot v_2,$$

insbesondere also eine Basis von $V = \langle v_1, v_2, w_1, w_2 \rangle$.

b) Da v_1, v_2 eine Basis von V sind, gibt es nach dem Prinzip der linearen Fortsetzung für jeden Vektorraum V' und jede Wahl von v_1', $v_2' \in V'$ genau eine lineare Abbildung $f : V \to V'$ mit $f(v_1) = v_1'$ und $f(v_2) = v_2'$; insbesondere existiert genau ein Endomorphismus $f : V \to V$ von V mit $f(v_1) = w_1$ und $f(v_2) = w_2$. Wegen

$$\begin{array}{ccccccc} f(v_1) & = & w_1 & = & 2 \cdot v_1 & + & 3 \cdot v_2 \\ f(v_2) & = & w_2 & = & 1 \cdot v_1 & + & 4 \cdot v_2 \end{array} \qquad \text{ist} \qquad M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

die darstellende Matrix von f bezüglich der Basis v_1, v_2 von V.

c) Wegen

$$\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda\, E_2) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (2-\lambda)\,(4-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 6\,\lambda + 5 = (\lambda - 1)\,(\lambda - 5)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt M die beiden einfachen Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 5$ und ist damit als 2×2–Matrix insbesondere diagonalisierbar; wegen

$$M - \lambda_1\, E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III-3\cdot I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von M zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$, und wegen

$$M - \lambda_2\, E_2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III+I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von M zum Eigenwert $\lambda_2 = 5$. Folglich ist auch der Endomorphismus f von V diagonalisierbar, und

$$b_1 = (-1) \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b_2 = 1 \cdot v_1 + 3 \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ist eine Basis von V aus Eigenvektoren von f.

8. a) Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt

- *orthogonal,* wenn $A \cdot A^\top = E_n = A^\top \cdot A$ gilt; es kann auch die dazu äquivalente Eigenschaft, daß die Spalten von A eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^n, \circ)$ bilden, zur Definition erhoben werden.
- *orthogonal diagonalisierbar,* wenn es eine orthogonale Matrix $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $P^\top A\, P = D$ gibt; es kann auch die dazu äquivalente Eigenschaft, daß es eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^n, \circ)$ aus Eigenvektoren von A gibt, zur Definition erhoben werden.

b) Da $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal diagonalisierbar ist, gibt es eine orthogonale Matrix $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$P^\top AP = D, \qquad \text{also} \qquad A = \underbrace{PP^\top}_{=E_n} A \underbrace{PP^\top}_{=E_n} = P \underbrace{P^\top AP}_{=D} P^\top = PDP^\top;$$

wegen

$$A^\top = \left(PDP^\top\right)^\top = \underbrace{(P^\top)^\top}_{=P} \underbrace{D^\top}_{=D} P^\top = PDP^\top = A$$

ist die Matrix A symmetrisch.

c) Da die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch ist, ist sie gemäß dem Satz über die Hauptachsentransformation orthogonal diagonalisierbar, es gibt also eine orthogonale Matrix $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$P^\top AP = D, \qquad \text{wie in b) also} \qquad A = PDP^\top;$$

dabei ist $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ mit den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von A. Da A nur die Eigenwerte -1 und 1 besitzt, gilt $\lambda_1^2 = \ldots = \lambda_n^2 = 1$ und damit

$$D \cdot D^\top \underset{D^\top = D}{=} D \cdot D = \operatorname{diag}(\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2) = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1) = E_n,$$

so daß die Matrix $D \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ orthogonal ist; folglich ist aber die Matrix A als Produkt der orthogonalen Matrizen P, D und $P^\top$ ebenfalls orthogonal.

9. a) Die gegebene Matrix

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

ist gemäß $A^\top = A$ symmetrisch, mithin orthogonal diagonalisierbar. Wegen

$$A - 1 \cdot E_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3-2 & -2 & -1 \\ -2 & 6-2 & 2 \\ -1 & 2 & 3-2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{III}+\text{I}}{\overset{\text{II}+2\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $\operatorname{Rang}(A - 1 \cdot E_3) = 1 < 3$; damit ist $\lambda_1 = 1$ ein Eigenwert von A der (algebraischen wie geometrischen) Vielfachheit $3 - \operatorname{Rang}(A - 1 \cdot E_3) = 2$, und die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

bilden eine Basis von $\operatorname{Eig}(A; \lambda_1 = 1)$. Damit besitzt A einen weiteren Eigenwert λ_2 der (algebraischen wie geometrischen) Vielfachheit 1 mit

$$\operatorname{Eig}(A; \lambda_2) = \operatorname{Eig}(A; \lambda_1)^\perp;$$

folglich ist der Vektor

$$v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

eine Basis von $\operatorname{Eig}(A; \lambda_2)$, und wegen

$$A \cdot v_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 \\ -16 \\ -8 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = 4 \cdot v_3$$

ergibt sich $\lambda_2 = 4$.

b) Wegen $\operatorname{Eig}(A; \lambda_1) = \operatorname{Eig}(A; \lambda_2)^\perp$ ist

$$v_1' = v_2 \times v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

ein (auf v_2 senkrecht stehender) Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_1, und folglich bilden

$$b_1 = \frac{v_1'}{\|v_1'\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; b_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; b_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^3, \circ)$ aus Eigenvektoren von A. Mit der orthogonalen Matrix

$$P = (b_1, b_2, b_3) = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

erhält man somit, daß $P^\top A\, P = D$ Diagonalgestalt besitzt.

c) Für die Matrix

$$F = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

gilt $F^2 = D$, so daß sich für die Matrix $B = PFP^\top \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ damit

$$B^2 = (PFP^\top)^2 = PF^2P^\top = PDP^\top = P(P^\top A\, P)P^\top = A$$

ergibt; dabei ist

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}^\top \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 2 \\ \sqrt{2} & 0 & -4 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 7 & -2 & -1 \\ -2 & 10 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

10. a) Die Aussage ist (sogar für beliebiges $n \in \mathbb{N}$) wahr: ist nämlich $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ orthogonal, so gilt nach Definition $A^\top A = E_n$, mit dem Determinantenmultiplikationssatz also

$$1 = \det(E_n) = \det(A^\top A) = \det(A^\top)\, \det(A),$$

woraus wegen $\det(A^\top) = \det(A)$ schon

$$1 = \det(A^\top)\, \det(A) = (\det(A))^2$$

und damit $\det(A) = 1$ oder $\det(A) = -1$ folgt.

b) Die Aussage ist (sogar für beliebiges $n \in \mathbb{N}$) wahr: ist nämlich $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ orthogonal, so gilt nach Definition $A^\top A = E_n$; ist nun $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A, so gilt

$$A\,x = \lambda\,x \qquad \text{für ein} \quad 0 \neq x \in \mathbb{R}^n,$$

woraus

$$\begin{aligned} x^\top x = x^\top E_n\, x = x^\top \left(A^\top A\right) x = \left(x^\top A^\top\right)(A\,x) = \\ = (A\,x)^\top (A\,x) = (\lambda\,x)^\top (\lambda\,x) = \lambda^2 \left(x^\top x\right), \end{aligned}$$

wegen $x^\top x > 0$ also $1 = \lambda^2$ und damit $\lambda = 1$ oder $\lambda = -1$ folgt.

c) Die Aussage ist falsch: die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

ist wegen

$$A^\top A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

orthogonal, besitzt aber wegen

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^2 - (-1)\cdot 1 = \lambda^2 + 1 > 0$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ keinen (reellen) Eigenwert.

d) Die Aussage ist (sogar für beliebiges $n \in \mathbb{N}$) wahr: ist nämlich $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ orthogonal, so gilt nach Definition $A^\top A = E_n$; damit ist A invertierbar mit $A^{-1} = A^\top$.

e) Die Aussage ist falsch: die Matrix $A \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ von c) ist orthogonal, wegen

$$A^\top = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

aber nicht symmetrisch.

11. a) Eine Bilinearform $\sigma : V \times V \to \mathbb{R}$ auf dem $\mathbb{R}$–Vektorraums V heißt

- *symmetrisch,* wenn $\sigma(v,w) = \sigma(w,v)$ für alle $v,\ w \in V$ gilt;
- *positiv definit,* wenn $\sigma(v,v) > 0$ für alle $v \in V$ mit $v \neq 0_V$ gilt.

In Abhängigkeit von den Parametern $s, t \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$A_{s,t} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & s & t \\ 1 & 1 & s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

mit der zugehörigen Bilinearform

$$\sigma_{s,t} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \sigma_{s,t}(x,y) = x^\top A_{s,t}\, y,$$

zu betrachten; dabei gilt zunächst

$$\sigma_{s,t} \text{ symmetrisch} \iff A_{s,t} \text{ symmetrisch} \iff t = 1.$$

Ferner besitzt die symmetrische Matrix $A_{s,1} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ die drei Hauptminoren

$$\det(1) = 1 > 0 \qquad \text{sowie} \qquad \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & s \end{pmatrix} = s - 1$$

und

$$\det(A_{s,1}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & s & 1 \\ 1 & 1 & s \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} \big(s^2 - 1 - 1\big) - \big(s + 1 + s\big) = s^2 - 2\,s - 3,$$

ist also nach dem Kriterium von Hurwitz genau dann positiv definit, wenn

$$s - 1 > 0 \qquad \text{und} \qquad s^2 - 2\,s - 3 > 0$$

gilt; dies ist wegen

$$s - 1 > 0 \iff s > 1$$

und damit

$$0 < s^2 - 2\,s - 3 = (s-3)(s+1) \underset{s>1}{\iff} s - 3 > 0 \iff s > 3$$

genau für $s > 3$ der Fall. Folglich ist die Bilinearform $\sigma_{s,t}$ genau dann symmetrisch und positiv definit, wenn $t = 1$ und $s > 3$ gilt.

b) Der im euklidischen Vektorraum $(\mathbb{R}^4, \circ)$ gegebene Untervektorraum

$$U = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + 2\,x_3 - 6\,x_4 = 0 \right\}$$

besitzt (als Lösungsraum einer homogenen linearen Gleichung mit den freien Variablen x_2, x_3 und x_4) die Basis

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

die wir nun dem Gram–Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren unterwerfen: damit erhalten wir zunächst

$$a_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \|a_1\| = \sqrt{2}, \quad \text{also} \quad b_1 = \frac{1}{\|a_1\|} \cdot a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

danach

$$a_2 = v_2 - (v_2 \circ b_1) \cdot b_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit

$$\|a_2\| = \sqrt{3}, \quad \text{also} \quad b_2 = \frac{1}{\|a_2\|} \cdot a_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und schließlich

$$\begin{aligned} a_3 &= v_3 - (v_3 \circ b_1) \cdot b_1 - (v_3 \circ b_2) \cdot b_2 = \\ &= \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit

$$\|a_3\| = \sqrt{7}, \quad \text{also} \quad b_3 = \frac{1}{\|a_3\|} \cdot a_3 = \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\langle b_1, b_2, b_3 \rangle = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ ist b_1, b_2, b_3 eine Orthonormalbasis von U.

12. a) Die gegebene Bilinearform

$$\sigma_s : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \sigma_s(x,y) = x^\top A_s\, y,$$

ist genau dann ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$, wenn die Matrix

$$A_s = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & s & 6 \\ 0 & 6 & s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

symmetrisch und positiv definit ist. Wegen $A_s^\top = A_s$ ist A_s symmetrisch und damit nach dem Hauptminorenkriterium von Hurwitz genau dann auch positiv definit, wenn ihre drei Hauptminoren positiv sind; wegen

$$\det\begin{pmatrix}1\end{pmatrix} = 1 > 0, \qquad \det\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & s \end{pmatrix} = s - 16 \qquad \text{und}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & s & 6 \\ 0 & 6 & s \end{pmatrix} = \left(s^2 + 0 + 0\right) - \left(0 + 36 + 16\,s\right) = s^2 - 16\,s - 36$$

mit

$$\begin{aligned} s - 16 > 0 &\iff s > 16 \qquad \text{und damit} \\ s^2 - 16\,s - 36 > 0 &\iff s^2 - 16\,x + 64 > 36 + 64 \\ &\iff (s-8)^2 > 100 \underset{s-8>0}{\iff} s - 8 > 10 \iff s > 18 \end{aligned}$$

ist dies genau für $s \in \,]18,\infty[$ der Fall.

b) Für den Winkel α, den die Einheitsvektoren e_1 und e_2 bezüglich dem Skalarprodukt σ_{32} einschließen, gilt

$$\cos\alpha = \frac{\sigma_{32}(e_1,e_2)}{\sqrt{\sigma(e_1,e_1)\cdot\sigma(e_2,e_2)}} = \frac{4}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{32}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

und wir erhalten den Winkel $\alpha = \frac{\pi}{4} = 45°$.

c) Wir unterwerfen die Basis e_1, e_2 des gegebenen Unterraums $U = \langle e_1, e_2\rangle$ von $\mathbb{R}^3$ dem Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren bezüglich dem Skalarprodukt σ_{20} und erhalten

$$a_1 = e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \|a_1\| = \sqrt{1} = 1, \quad \text{also} \quad b_1 = \frac{1}{\|a_1\|}\cdot a_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},$$

und damit

$$a_2 = e_2 - \sigma_{20}(e_2,b_1)\cdot b_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - 4\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\1\\0\end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} \sigma_{20}(a_2, a_2) &= a_2^\top A_{20} a_2 = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 20 & 6 \\ 0 & 6 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = 4, \quad \text{bzw. } \|a_2\| = \sqrt{\sigma_{20}(a_2, a_2)} = 2, \end{aligned}$$

also

$$b_2 = \frac{1}{\|a_2\|} \cdot a_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

folglich ist b_1, b_2 eine Orthonormalbasis von U bezüglich σ_{20}.

13. a) Wir betrachten einen Untervektorraum U eines euklidischen Vektorraums (V, σ) mit endlicher Dimension $\dim(V) < \infty$.

- Eine Basis $b_1, \ldots, b_r$ von U heißt *Orthonormalbasis von U*, wenn die Vektoren $b_1, \ldots, b_r$ bezüglich des Skalarprodukts σ normiert und paarweise orthogonal sind; für alle i, $j \in \{1, \ldots, r\}$ mit $i \neq j$ gilt also

$$\|b_i\|_\sigma = \sqrt{\sigma(b_i, b_i)} = 1 \qquad \text{und} \qquad \sigma(b_i, b_j) = 0.$$

- Ein Untervektorraum $U^\perp$ von V heißt *orthogonales Komplement von U in V*, wenn er ein zu U komplementärer und bezüglich des Skalarprodukts σ orthogonaler Untervektorraum von V ist; es gilt also

$$U \oplus U^\perp = V \qquad \text{und} \qquad U \perp U^\perp.$$

Alternativ kann man auch

$$U^\perp = \{v \in V \mid u \perp v \text{ für alle } u \in U\}$$

definieren.

b) Es wird nun der euklidische $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt $\circ$ betrachtet.

- Die beiden gegebenen Vektoren v_1, $v_2 \in \mathbb{R}^4$ sind gemäß

$$v_1 \circ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 0$$

orthogonal, so daß der erzeugte Untervektorraum $U = \langle v_1, v_2 \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$ die Orthonormalbasis

$$b_1 = \frac{1}{\|v_1\|}\, v_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \frac{1}{\|v_2\|}\, v_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

besitzt. Mit der Hilfsmatrix $B = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ gilt ferner

$$U^\perp = \left\{x \in \mathbb{R}^4 \mid B^\top x = 0\right\},$$

und wegen

$$B^\top = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II}+2\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

ist

$$v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine Basis des orthogonalen Komplements $U^\perp$ von U in $\mathbb{R}^4$; wir unterwerfen diese dem Gram–Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren und erhalten

$$a_3 = v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \|a_3\| = 3, \quad \text{also} \quad b_3 = \frac{1}{\|a_3\|} \cdot a_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

sowie

$$a_4 = v_4 - (v_4 \circ b_3) \cdot b_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{18}{3} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mit

$$\|a_4\| = 3, \quad \text{also} \quad b_4 = \frac{1}{\|a_4\|} \cdot a_4 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

so daß b_3, b_4 wegen $\langle b_3, b_4 \rangle = \langle v_3, v_4 \rangle$ eine Orthonormalbasis von $U^\perp$ ist. Insgesamt ist b_1, b_2, b_3, b_4 eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^4, \circ)$.

- Für die Spiegelung $s_U : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ am Untervektorraum $U \subseteq \mathbb{R}^4$ gilt

$$s_U(b_1) = b_1 \quad \text{und} \quad s_U(b_2) = b_2 \quad \text{für} \quad b_1,\, b_2 \in U$$

sowie

$$s_U(b_3) = -b_3 \quad \text{und} \quad s_U(b_4) = -b_4 \quad \text{für} \quad b_3,\, b_4 \in U^\perp;$$

für die Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ von s_U gilt demnach

$$A \cdot b_1 = b_1, \quad A \cdot b_2 = b_2 \quad \text{sowie} \quad A \cdot b_3 = -b_3, \quad A \cdot b_4 = -b_4,$$

und mit den beiden Hilfsmatrizen

$$P = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathrm{O}_4(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad Q = (b_1, b_2, -b_3, -b_4) \in \mathrm{O}_4(\mathbb{R})$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} A \cdot P = A \cdot (b_1, b_2, b_3, b_4) &= (A \cdot b_1, A \cdot b_2, A \cdot b_3, A \cdot b_4) \\ &= (b_1, b_2, -b_3, -b_4) = Q, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} A &= Q \cdot P^{-1} \underset{P \in \mathrm{O}_4(\mathbb{R})}{=} Q \cdot P^\top = \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 & 0 \\ 8 & -1 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 4 & 8 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_4(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

14. Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^3$, versehen mit dem Standardskalarprodukt $\circ$.

a) Es gilt:

- Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = A \cdot x$, beschreibt genau dann eine Drehung, wenn die Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ orthogonal mit Determinante $\det(A) = 1$ ist.
- Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = A \cdot x$, beschreibt genau dann eine Spiegelung, wenn die Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ orthogonal und symmetrisch ist.

b) Wir bestimmen zunächst die notwendige Gestalt der Abbildungsmatrix

$$A = (s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^{3\times3} \qquad \text{mit} \qquad s_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

so daß die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = A \cdot x$, eine Drehung beschreibt, die e_1 auf e_2 und e_2 auf e_3 abbildet. Wegen

$$\begin{aligned} s_1 = A \cdot e_1 &= f(e_1) = e_2 \\ s_2 = A \cdot e_2 &= f(e_2) = e_3 \end{aligned}$$

ergibt sich

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 1 & 0 & a_{23} \\ 0 & 1 & a_{33} \end{pmatrix},$$

wegen $A \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ insbesondere

$$\begin{aligned} &s_1 \perp s_3, \qquad \text{also} \qquad 0 = s_1 \circ s_3 = a_{23}, \\ &s_2 \perp s_3, \qquad \text{also} \qquad 0 = s_2 \circ s_3 = a_{33}, \end{aligned}$$

sowie

$$1 = \det(A) = \big(0 + 0 + a_{13}\big) - \big(0 + 0 + 0\big) = a_{13},$$

insgesamt also

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese einzige in Frage kommende Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ist wegen $A^\top A = E_3$ orthogonal, und nach Konstruktion gilt $\det(A) = 1$ sowie $f(e_1) = e_2$ und $f(e_2) = e_3$; insbesondere ist $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Drehung. Wegen

$$A - E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{II}+\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{III}+\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ergibt sich die Drehachse $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, und für ihren Drehwinkel α gilt

$$2\cos\alpha + 1 = \mathrm{Spur}(A) = 0, \qquad \text{also} \qquad \cos\alpha = -\frac{1}{2},$$

und damit $\alpha = \pm\frac{2}{3}\pi = \pm 120°$.

c) Es keine keine Spiegelung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ existieren, die e_1 auf e_2 und e_2 auf e_e abbildet; ansonsten ergibt sich wegen $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ nämlich in

$$e_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}(e_1) = (f \circ f)(e_1) = f(f(e_1)) = f(e_2) = e_3$$

ein Widerspruch. Alternativ läßt sich auch wie folgt argumentieren: analog zu b) besitzt die Abbildungsmatrix die notwendige Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 1 & 0 & a_{23} \\ 0 & 1 & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

und ist damit wegen $A^\top \neq A$ nicht symmetrisch.

15. a) Die Matrix

$$S_1 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

ist wegen $S_1^\top S_1 = E_3$ orthogonal und wegen $S_1^\top = S_1$ symmetrisch. Damit beschreibt die Abbildung $s_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $s_1(x) = S_1 \cdot x$, die Spiegelung am Eigenraum $\mathrm{Eig}(S_1; 1)$ von S_1 zum Eigenwert 1; wegen

$$S_1 - 1 \cdot E_3 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -2 & -4 & 6 \\ 3 & 6 & -9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist also s_1 die Spiegelung an der Ebene $E_1 : -x_1 - 2\,x_2 + 3\,x_3 = 0$.

b) Die gegebene Ebene

$$E_2 = \mathbb{R} \cdot u_1 + \mathbb{R} \cdot u_2 \qquad \text{mit} \qquad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

besitzt das orthogonale Komplement

$$E_2^{\perp} = \mathbb{R} \cdot \widetilde{v} \qquad \text{mit} \qquad \widetilde{v} = u_1 \times u_2 = u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und folglich die Darstellung

$$E_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 + x_3 = 0 \right\}.$$

Für $x \in \mathbb{R}^3$ betrachten wir die Zerlegung

$$x = \underbrace{u}_{\in E_2} + \underbrace{\widetilde{u}}_{\in E_2^{\perp}} \qquad \text{mit} \qquad \widetilde{u} = \lambda \cdot \widetilde{v} \qquad \text{für ein} \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

woraus wegen

$$u = x - \lambda \cdot \widetilde{v} = \begin{pmatrix} x_1 - \lambda \\ x_2 + \lambda \\ x_3 - \lambda \end{pmatrix} \in E_2$$

zunächst

$$(x_1 - \lambda) - (x_2 + \lambda) + (x_3 - \lambda) = 0, \qquad \text{also} \qquad \lambda = \frac{1}{3}\left(x_1 - x_2 + x_3\right),$$

folgt. Somit ist

$$\begin{aligned} s_{E_2}(x) &= u - \widetilde{u} = (x - \lambda \cdot \widetilde{v}) - \lambda \cdot \widetilde{v} = x - 2\lambda \cdot \widetilde{v} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 - \frac{2}{3}\left(x_1 - x_2 + x_3\right) \cdot 1 \\ x_2 - \frac{2}{3}\left(x_1 - x_2 + x_3\right) \cdot (-1) \\ x_3 - \frac{2}{3}\left(x_1 - x_2 + x_3\right) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\,x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 \\ \frac{2}{3}\,x_1 + \frac{1}{3}\,x_2 + \frac{2}{3}\,x_3 \\ -\frac{2}{3}\,x_1 + \frac{2}{3}\,x_2 + \frac{1}{3}\,x_3 \end{pmatrix} \\ &= S_2 \cdot x \qquad \text{mit} \qquad S_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}. \end{aligned}$$

c) Für die Komposition $d = s_2 \circ s_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $d(x) = S \cdot x$, gilt

$$\begin{aligned} S = S_2 \cdot S_1 &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{21}\begin{pmatrix} -4 & -8 & 19 \\ 16 & 11 & 8 \\ -13 & 16 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}; \end{aligned}$$

wegen $S^\top S = E_3$ ist S orthogonal, so daß d wegen

$$\det(S) = \frac{1}{21^3}\cdot\begin{vmatrix}-4 & -8 & 19\\ 16 & 11 & 8\\ -13 & 16 & 4\end{vmatrix} \overset{\text{II}+4\text{I}}{\underset{\text{III}+2\text{I}}{=}} \frac{1}{21^3}\cdot\begin{vmatrix}-4 & -8 & 19\\ 0 & -21 & 84\\ -21 & 0 & 42\end{vmatrix} \overset{21 \text{ aus II}}{\underset{21 \text{ aus III}}{=}}$$

$$= \frac{21^2}{21^3}\cdot\begin{vmatrix}-4 & -8 & 19\\ 0 & -1 & 4\\ -1 & 0 & 2\end{vmatrix} = \frac{1}{21}\cdot\Big((8+32+0)-(19+0+0)\Big) = 1$$

eine Drehung beschreibt. Wegen

$$S - 1\cdot E_3 = \frac{1}{21}\begin{pmatrix}-4-21 & -8 & 19\\ 16 & 11-21 & 8\\ -13 & 16 & 4-21\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}-25 & -8 & 19\\ 16 & -10 & 8\\ -13 & 16 & -17\end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{I}+\text{II}}{\underset{\text{III}+\text{II}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix}-9 & -18 & 27\\ 16 & -10 & 8\\ 3 & 6 & -9\end{pmatrix} \overset{-\frac{1}{9}\text{I}}{\underset{\frac{1}{2}\text{II},\frac{1}{3}\text{III}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 8 & -5 & 4\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{II}-8\text{I}}{\underset{\text{III}-\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & -21 & 28\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \underset{-\frac{1}{21}\text{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & -\frac{4}{3}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \underset{\text{I}-2\text{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{3}\\ 0 & 1 & -\frac{4}{3}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

ist $\mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}$ die Drehachse von d, und für den Drehwinkel $\sigma \in [0,\pi]$ gilt

$$2\,\cos\sigma + 1 = \operatorname{Spur}(S) = \frac{(-4)+11+4}{21} = \frac{11}{21}, \quad \text{also} \quad \cos\sigma = -\frac{5}{21}.$$

16. a) Wir betrachten eine Drehung im euklidischen Vektorraum $(\mathbb{R}^3,\circ)$ mit der Drehachse $\mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ und dem Drehwinkel φ mit $\cos\varphi = \frac{3}{5}$. Wir ergänzen den normierten Richtungsvektor

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \qquad \text{durch} \qquad b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

zu einer Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^3,\circ)$. Bei der zu betrachtenden Drehung bleibt b_1 als Punkt der Drehachse fest, während sich die Wirkung dieser Drehung um den Winkel φ mit $\cos\varphi = \frac{3}{5}$ (und damit $\sin\varphi = \pm\frac{4}{5}$) in der von b_2 und b_3 aufgespannten Lotebene niederschlägt; für die darstellende Matrix M dieser Drehung bezüglich b_1, b_2, b_3 ergibt sich damit

$$M = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & D_\varphi\end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad D_\varphi = \begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad D_\varphi = \begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}$$

also

$$M = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R}) \qquad \text{bzw.} \qquad M = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R}).$$

Mit der orthogonalen Matrix

$$P = (b_1, b_2, b_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$$

gilt für die Abbildungsmatrix A dieser Drehung dann $M = P^\top A P$, also

$$\begin{aligned} A = PMP^\top \quad &= \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \quad \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 5 & -3 & 4 \\ 0 & 4\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \quad \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 8 & 2 & -4\sqrt{2} \\ 2 & 8 & 4\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} & -4\sqrt{2} & 6 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$A = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 8 & 2 & -4\sqrt{2} \\ 2 & 8 & 4\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} & -4\sqrt{2} & 6 \end{pmatrix}^\top = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 8 & 2 & 4\sqrt{2} \\ 2 & 8 & -4\sqrt{2} \\ -4\sqrt{2} & 4\sqrt{2} & 6 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R}).$$

b) Orthogonale Abbildungen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f \circ f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ und $f(v) = v$ sind neben der Identität $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ auch die beiden Drehungen mit dem Drehwinkel $\varphi = \pm\frac{2\pi}{3}$ und der Drehachse $\mathbb{R} \cdot v$; wir haben zu zeigen, daß es keine weiteren Abbildungen mit dieser Eigenschaft gibt.

Wir betrachten dazu eine orthogonale Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = A \cdot x$, mit $f \circ f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ und $f(v) = v$; damit ist zunächst die Abbildungsmatrix $A \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ orthogonal. Die Komposition $f \circ f \circ f$ hat die Abbildungsmatrix A^3, und die Einheitsmatrix E_3 ist die Abbildungsmatrix der Identität $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$; damit gilt $A^3 = E_3$, und es ergibt sich

$$1 = \det(E_3) = \det(A^3) = (\det(A))^3, \qquad \text{also} \qquad \det(A) = 1.$$

Wegen $A \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ und $\det(A) = 1$ beschreibt f eine Drehung in $(\mathbb{R}^3, \circ)$, wobei wegen $f \circ f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ als Drehwinkel nur $\varphi = 0$ mit $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ sowie $\varphi = \pm\frac{2\pi}{3}$ in Frage kommen; wegen $f(v) = v$ ist $\mathbb{R} \cdot v$ die Drehachse von f.