MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2020
Klausur
26.08.2020

Klausur zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“ — Lösungsvorschlag —

1. a) Wir betrachten eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
   - Eine reelle Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt Eigenwert von A, wenn es einen Vektor $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ mit $A\,x = \lambda\,x$ gibt.
   - Ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ heißt Eigenvektor von A, wenn $x \neq 0$ ist und es eine reelle Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $A\,x = \lambda\,x$ gibt.
   - Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt diagonalisierbar, wenn
     - es eine Basis $b_1, \ldots, b_n$ von $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren von A gibt bzw.
     - es eine invertierbare Matrix $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ gibt, so daß $D = P^{-1}AP$ Diagonalgestalt besitzt.

   b) Wegen

$$A - \lambda\,E_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}+\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}-2\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist

$$\mathrm{Rang}(A - \lambda\,E_3) = 1 < 3;$$

damit ist $\lambda = 1$ ein Eigenwert der Matrix A der geometrischen Vielfachheit

$$\gamma = 3 - \mathrm{Rang}(A - \lambda\,E_3) = 3 - 1 = 2,$$

wobei

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(A, \lambda = 1)$ bilden. Für den Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ gilt $x \neq 0$ und

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot x;$$

damit ist x ein Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert $\mu = -1$. Folglich bilden u_1, u_2, x eine Basis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A; damit ist A diagonalisierbar, und mit der invertierbaren Matrix

$$P = (u_1, u_2, x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(\lambda, \lambda, \mu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

gilt dann $P^{-1} A\, P = D$.

c) Die in Abhängigkeit vom Parameter $c \in \mathbb{R}$ gegebene Matrix

$$A_c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & c & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

besitzt das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} \chi_{A_c}(\lambda) &= \det(A_c - \lambda\, E_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & c & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &\overset{\text{Laplace}}{\underset{\text{3. Spalte}}{=}} (-1)^{3+3} \cdot (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda) \cdot \left[(1-\lambda)^2 - 1^2\right] \\ &= -(\lambda-2) \cdot \left[\lambda^2 - 2\,\lambda\right] = -(\lambda-2)^2\,\lambda; \end{aligned}$$

damit zerfällt χ_{A_c} vollständig in Linearfaktoren. Die Matrix A_c besitzt die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ der algebraischen Vielfachheit $\alpha_1 = 2$ und damit der geometrischen Vielfachheit $\gamma_1 \in \{1, 2\}$ sowie $\lambda_2 = 0$ der algebraischen Vielfachheit $\alpha_2 = 1$ und damit der geometrischen Vielfachheit $\gamma_2 = 1$; folglich ist A_c genau dann diagonalisierbar, wenn $\gamma_1 = 2$ gilt. Wegen

$$A_c - \lambda_1 E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & c & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{II+I}}{\underset{\text{III+I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & c+1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{II}\leftrightarrow\text{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & c+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\gamma_1 = 3 - \operatorname{Rang}(A_c - \lambda_1 E_3) = \begin{cases} 3-2 = 1, & \text{für } c \neq -1, \\ 3-1 = 2, & \text{für } c = -1, \end{cases}$$

ist dies genau für $c = -1$ der Fall.

2. a) Die gegebene Bilinearform

$$\sigma_s : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \sigma_s(x, y) = x^\top A_s\, y,$$

ist genau dann ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$, wenn die Matrix

$$A_s = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & s & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

symmetrisch und positiv definit ist. Wegen $A_s^\top = A_s$ ist A_s symmetrisch und damit nach dem Hauptminorenkriterium von Hurwitz genau dann auch positiv definit, wenn ihre drei Hauptminoren positiv sind; wegen

$$\det\begin{pmatrix}1\end{pmatrix} = 1 > 0, \qquad \det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & s\end{pmatrix} = s-1 \qquad \text{und}$$

$$\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & s & 2\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix} = \left(2\,s+0+0\right) - \left(0+4+2\right) = 2\,s-6$$

mit

$$s-1>0 \iff s>1 \qquad \text{und} \qquad 2\,s-6>0 \iff 2\,s>6 \iff s>3$$

ist dies genau für $s \in\,]3,+\infty[$ der Fall.

b) Für $s=6$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\sigma_6(v,v) &= v^\top A_6\, v = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 6 & 2\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 1, \quad \text{also} \quad \|v\|_{\sigma_6} = \sqrt{\sigma_6(v,v)} = 1,\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\sigma_6(w,w) &= w^\top A_6\, w = \begin{pmatrix}0 & 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 6 & 2\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix}0 & 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix} = 4, \quad \text{also} \quad \|w\|_{\sigma_6} = \sqrt{\sigma_6(w,w)} = 2,\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\sigma_6(v,w) &= v^\top A_6\, w = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 6 & 2\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix} = 1;\end{aligned}$$

für den Winkel α, den die Vektoren v und w bezüglich des Skalarprodukts σ_6 einschließen, gilt demnach

$$\cos\alpha = \frac{\sigma_6(v,w)}{\|v\|_{\sigma_6}\cdot\|w\|_{\sigma_6}} = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2},$$

und wir erhalten den Winkel $\alpha = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$.

c) Die beiden Vektoren v, $w \in \mathbb{R}^3$ sind keine skalaren Vielfachen voneinander, mithin linear unabhängig, und bilden folglich eine Basis des von ihnen erzeugten Untervektorraums $U = \langle v, w \rangle$ von $\mathbb{R}^3$. Für $s = 4$ unterwerfen wir nun diese Basis v, w von $U \subseteq \mathbb{R}^3$ dem Gram–Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren bezüglich des Skalarprodukts σ_4 und erhalten

- im ersten Schritt $a_1 = v \in \mathbb{R}^3$ mit

$$\begin{aligned} \sigma_4(a_1, a_1) &= v^\top A_4\, v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1, \end{aligned}$$

  also $\|a_1\|_{\sigma_4} = \sqrt{\sigma_4(a_1, a_1)} = 1$, und damit

$$b_1 = \frac{1}{\|a_1\|_{\sigma_4}} \cdot a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

- und im zweiten Schritt $a_2 = w - \sigma_4(w, b_1) \cdot b_1 \in \mathbb{R}^3$, wegen

$$\begin{aligned} \sigma_4(w, b_1) &= w^\top A_4\, b_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \end{aligned}$$

  damit

$$a_2 = w - \sigma_4(w, b_1) \cdot b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

  mit

$$\begin{aligned} \sigma_4(a_2, a_2) &= a_2^\top A_4\, a_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1, \end{aligned}$$

  also $\|a_2\|_{\sigma_4} = \sqrt{\sigma_4(a_2, a_2)} = 1$, und damit

$$b_2 = \frac{1}{\|a_2\|_{\sigma_4}} \cdot a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix};$$

folglich ist b_1, b_2 wegen $\langle b_1, b_2 \rangle = \langle v, w \rangle$ eine Orthonormalbasis von $U \subseteq \mathbb{R}^3$ bezüglich σ_4.

3. Gegeben sind die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \qquad \text{und} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ist gemäß $A^\top = A$ symmetrisch und folglich orthogonal diagonalisierbar.

b) Für das charakteristische Polynom der Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gilt

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) \quad &= \quad \det(A - \lambda\, E_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \\ &\underset{\text{III+II}}{\overset{\text{I}-\text{II}}{=}} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1+\lambda & 0 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} = \\ &\underset{1-\lambda \text{ aus III}}{\overset{1-\lambda \text{ aus I}}{=}} (1-\lambda)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \\ &\underset{\text{Sarrus}}{=} (1-\lambda)^2 \cdot \big[((-\lambda) + 0 + 0) - (0 + 1 + 1)\big] = \\ &= (1-\lambda)^2 \cdot [-\lambda - 2] = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 2) \end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

c) Die gemäß a) orthogonal diagonalisierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ besitzt gemäß b) den doppelten Eigenwert $\lambda_1 = 1$ und den einfachen Eigenwert $\lambda_2 = -2$, und es gilt

$$\operatorname{Eig}(A, \lambda_1 = 1) \oplus \operatorname{Eig}(A, \lambda_2 = -2) = \mathbb{R}^3.$$

Damit läßt sich für jeden der beiden Eigenräume von $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ jeweils eine Orthonormalbasis (bezüglich des Standardskalarprodukts $\circ$ von $\mathbb{R}^3$) folgendermaßen berechnen:

- Wegen

$$A - \lambda_1\, E_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{III+I}}{\overset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

eine Basis des Eigenraums $\operatorname{Eig}(A, \lambda_1 = 1)$; damit ist

$$v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

wegen $v_3 \perp v_1$ und $v_3 \perp v_2$ eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(A, \lambda_2 = -2)$, und

$$v_2' = v_3 \times v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

ist wegen $v_2' \perp v_3$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ mit $v_2' \perp v_1$. Folglich ist

$$\frac{1}{\|v_1\|} \cdot v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\|v_2'\|} \cdot v_2' = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

eine Orthonormalbasis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(A, \lambda_1 = 1)$ sowie

$$\frac{1}{\|v_3\|} \cdot v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

eine Orthonormalbasis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(A, \lambda_2 = -2)$ jeweils bezüglich des Standardskalarprodukts $\circ$ auf $\mathbb{R}^3$.

- Wegen

$$A - \lambda_2 E_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}+\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}+2\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \underset{\frac{1}{3}\cdot\mathrm{II}}{\overset{(-1)\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}-3\mathrm{II}}{\overset{\mathrm{I}+2\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(A, \lambda_2 = -2)$; damit ist

$$w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

wegen $w_2 \circ w_1 = (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) = 0$, also $w_2 \perp w_1$, ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$, und

$$w_3 = w_1 \times w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

ist wegen $w_3 \perp w_1$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ mit $w_3 \perp w_2$. Folglich ist

$$\frac{1}{\|w_1\|} \cdot w_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

eine Orthonormalbasis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(A, \lambda_2 = -2)$ sowie

$$\frac{1}{\|w_2\|} \cdot w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\|w_3\|} \cdot w_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

eine Orthonormalbasis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(A, \lambda_1 = 1)$ jeweils bezüglich des Standardskalarprodukts $\circ$ auf $\mathbb{R}^3$.

d) Gemäß c) ist

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^3, \circ)$ aus Eigenvektoren der Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ zu den Eigenwerten $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 1$; mit der orthogonalen Matrix

$$P = (b_1, b_2, b_2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$$

und der gegebenen Diagonalmatrix

$$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}$$

ergibt sich $P^\top A\, P = D$.

4. Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt $\circ$.

a) Es gilt:

- Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = A \cdot x$, beschreibt genau dann eine Spiegelung, wenn die Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ orthogonal und symmetrisch ist.
- Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = A \cdot x$, beschreibt genau dann eine Drehung, wenn die Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ orthogonal mit Determinante $\det(A) = 1$ ist.

b) Die gegebene Matrix

$$S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}$$

ist gemäß

$$S^\top \cdot S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = E_3$$

orthogonal und gemäß $S^\top = S$ auch symmetrisch; damit beschreibt der Endomorphismus

$$s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad s(x) = S \cdot x,$$

die Spiegelung am Eigenraum $\operatorname{Eig}(S, \lambda = 1)$ von S zum Eigenwert $\lambda = 1$; wegen

$$S - 1 \cdot E_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2-3 & 1 & 2 \\ 1 & 2-3 & -2 \\ 2 & -2 & -1-3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}+2\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}+\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist

$$\dim(\operatorname{Eig}(S, \lambda = 1)) = 3 - \operatorname{Rang}(S - 1 \cdot E_3) = 3 - 1 = 2,$$

und der Endomorphismus s ist die Ebenenspiegelung am Eigenraum

$$\operatorname{Eig}(S, \lambda = 1) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit der Basis} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Die gegebene Matrix

$$D = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

ist gemäß

$$D^\top \cdot D = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = E_3$$

orthogonal und besitzt die Determinante

$$\begin{aligned} \det(D) \quad &= \quad \frac{1}{3^3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &\underset{\text{Sarrus}}{=} \quad \frac{1}{27} \cdot \big((4+4+4) - ((-8) + (-8) + 1)\big) = 1; \end{aligned}$$

damit beschreibt der Endomorphismus

$$d : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad d(x) = D \cdot x,$$

eine Drehung; wegen

$$D - 1 \cdot E_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2-3 & 1 & 2 \\ 1 & 2-3 & -2 \\ -2 & 2 & 1-3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}-2\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}+\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II}\leftrightarrow(-\frac{1}{6})\mathrm{III}}{\overset{(-1)\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}+2\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

erhält man als Drehachse

$$\mathrm{Eig}(S, \lambda = 1) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und für den Drehwinkel δ von d ergibt sich

$$1 + 2\cos\delta = \mathrm{Spur}(D) = \frac{2+2+1}{3} = \frac{5}{3}, \qquad \text{also} \qquad \cos\delta = \frac{\frac{5}{3} - 1}{2} = \frac{1}{3}.$$