MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2020
Klausur
26.08.2020

Klausur zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“

1. a) Für eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definiere man die Begriffe
   - „$\lambda \in \mathbb{R}$ ist Eigenwert von A“ und „$x \in \mathbb{R}^n$ ist Eigenvektor von A“ (1)
   - sowie „A ist diagonalisierbar.“. (1)

   b) Man betrachte die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \qquad \text{sowie} \qquad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

   Man zeige, daß $\lambda = 1$ ein Eigenwert von A sowie $x \in \mathbb{R}^3$ ein Eigenvektor von A ist, und bestimme eine invertierbare Matrix $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $P^{-1}A\,P = D$. (2)

   c) Man zeige, daß die in Abhängigkeit von $c \in \mathbb{R}$ gegebene Matrix

$$A_c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & c & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

   genau dann diagonalisierbar ist, wenn $c = -1$ gilt. (2)

2. Gegeben seien die Matrix

$$A_s = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & s & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \qquad \text{sowie} \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3;$$

   dabei ist $s \in \mathbb{R}$ ein reeller Parameter. Man betrachte die Bilinearform

$$\sigma_s : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \sigma_s(x,y) = x^\top A_s\, y$$

   auf dem $\mathbb{R}$–Vektorraum $\mathbb{R}^3$.

   a) Man bestimme alle $s \in \mathbb{R}$, für die σ_s ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ ist. (2)

   b) Für $s = 6$ berechne man den Winkel $\sphericalangle_{\sigma_6}(v,w)$, den die Vektoren v und w bezüglich des Skalarprodukts σ_6 einschließen. (2)

   c) Für $s = 4$ bestimme man eine Orthonormalbasis des von v und w erzeugten Untervektorraums $U = \langle v, w\rangle$ bezüglich des Skalarprodukts σ_4. (2)

3. Gegeben seien die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \qquad \text{und} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) Man begründe, daß A orthogonal diagonalisierbar ist. (1)

b) Man berechne das charakteristische Polynom von A und bestätige

$$\chi_A(\lambda) = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. (2)

c) Man berechne für jeden Eigenraum von A jeweils eine Orthonormalbasis (bezüglich des Standardskalarprodukts $\circ$ von $\mathbb{R}^3$). (2)

d) Man bestimme eine orthogonale Matrix $P \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ mit $P^\top A\, P = D$. (1)

4. Man betrachte den Vektorraum $\mathbb{R}^3$, versehen mit dem Standardskalarprodukt $\circ$.

a) Man gebe jeweils eine äquivalente Charakterisierung für

- „$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = A \cdot x$, beschreibt eine Spiegelung.“ (1)
- „$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = A \cdot x$, beschreibt eine Drehung.“ (1)

durch Eigenschaften der Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ an.

b) Man zeige, daß der Endomorphismus

$$s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad s(x) = S \cdot x, \quad \text{mit} \quad S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

eine Ebenenspiegelung beschreibt, und gebe eine Basis für die Spiegelebene an. (2)

c) Man zeige, daß der Endomorphismus

$$d : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad d(x) = D \cdot x, \quad \text{mit} \quad D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

eine Drehung beschreibt, und gebe die Drehachse sowie den Cosinus des Drehwinkels an. (2)