MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2020
Blatt 12
29.07.2020

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“ — Bearbeitungsvorschlag —

45. a) Mit dem Trägerpunkt $t = A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und den beiden Richtungsvektoren $u_1 = B - A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $u_2 = C - A = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ ergibt sich zunächst für die Ebene durch A, B und C die Parameterdarstellung

$$E = t + \mathbb{R} \cdot u_1 + \mathbb{R} \cdot u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Mit dem Normalenvektor

$$\widetilde{u}_E = u_1 \times u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ergibt sich für E die Gleichung

$$\widetilde{u}_E \circ x = \widetilde{u}_E \circ t, \quad \text{also} \quad -x_1 + 2\,x_2 + x_3 = -2$$

und wegen $\|\widetilde{u}_E\| = \sqrt{6}$ und $\widetilde{u}_E \circ t < 0$ die Hessesche Normalform

$$\frac{-x_1 + 2\,x_2 + x_3 + 2}{-\sqrt{6}} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{x_1 - 2\,x_2 - x_3 - 2}{\sqrt{6}} = 0.$$

Damit ist

$$d(D, E) = \left| \frac{0 - 2 \cdot 1 - (-\frac{5}{2}) - 2}{\sqrt{6}} \right| = \left| \frac{-\frac{3}{2}}{\sqrt{6}} \right| = \frac{3}{2\sqrt{6}}.$$

b) Mit dem Trägerpunkt $t_\ell = D$ und dem Richtungsvektor $u_\ell = \widetilde{u}_E$ (da ℓ senkrecht zu E) ergibt sich für die gesuchte Lotgerade die Parameterdarstellung

$$\ell = t_\ell + \mathbb{R} \cdot u_\ell = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für $L = \ell \cap E$ gilt $L = \begin{pmatrix} -\lambda \\ 1+2\lambda \\ -\frac{5}{2}+\lambda \end{pmatrix} \in \ell$ für ein geeignetes $\lambda \in \mathbb{R}$, wobei wegen $L \in E$ gilt

$$-1 \cdot (-\lambda) + 2 \cdot (1+2\lambda) + 1 \cdot (-\frac{5}{2} + \lambda) = -2, \quad \text{also} \quad \lambda = -\frac{1}{4}$$

und damit

$$L = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{11}{4} \end{pmatrix}.$$

46. Die Ebene $E_1 \subseteq \mathbb{R}^3$ mit der Gleichung $x + y = 1$ besitzt den Normalenvektor $\widetilde{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ der Länge $\|\widetilde{u}_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$; damit besitzt E_1 die Hessesche Normalform

$$\frac{x + y - 1}{\sqrt{2}} = 0,$$

womit sich für den Abstand $d(0, E_1)$ des Nullpunkts $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ von E_1

$$d(0, E_1) = \left| \frac{0 + 0 - 1}{\sqrt{2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ergibt. Die Schnittgerade $L = E_1 \cap E_2$ ist genau die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & & & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 1 \end{array}$$

wodurch sich

$$L = t + \mathbb{R} \cdot u \qquad \text{mit} \qquad t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ergibt. Der Fußpunkt x_0 des Lotes ℓ vom Nullpunkt $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf die Gerade L besitzt (als Punkt von L) die Gestalt

$$x_0 = t + \lambda \cdot u = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 - \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$$

für ein geeignetes $\lambda \in \mathbb{R}$; damit ist

$$x_0 - 0 = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 - \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 - \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$$

ein Richtungsvektor der Lotgeraden ℓ, der allerdings auf dem Richtungsvektor u der Geraden L senkrecht stehen muß. Aus

$$0 = u \circ (x_0 - 0) = 1 \cdot \lambda + (-1) \cdot (1 - \lambda) + 1 \cdot \lambda = -1 + 3\,\lambda$$

ergibt sich $\lambda = \frac{1}{3}$ und damit $x_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Damit ergibt sich für den Abstand $d(0, L)$ des Nullpunkts 0 von der Geraden L

$$d(0, L) = d(0, x_0) = \|x_0 - 0\| = \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{3} \cdot \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \frac{1}{3}\sqrt{6}.$$

47. a) Es ist $g_1 = t_1 + \mathbb{R}\,u_1$ und $g_2 = t_2 + \mathbb{R}\,u_2$ mit

$$t_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ und } u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad t_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ und } u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Da die Richtungsvektoren u_1, u_2 linear unabhängig sind, können die Geraden g_1 und g_2 nicht parallel sein. Zudem gibt es unter der Annahme, daß sich g_1 und g_2 schneiden, Parameter α und $\beta \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

was zum linearen Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

führt, das jedoch wegen

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 8 \\ -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{III+I}}{\overset{\text{II−I}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 10 \\ 0 & -4 & -2 \end{array}\right) \underset{\text{III−4II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & -42 \end{array}\right)$$

keine Lösung besitzt. Folglich sind g_1 und g_2 windschief.

b) Die gemeinsame Lotgerade ℓ der Geraden g_1 und g_2 besitzt den Richtungsvektor

$$u_1 \times u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix};$$

seien x_1 und x_2 die Lotfußpunkte auf g_1 und g_2. Dabei besitzt x_1 (als Punkt von g_1) die Gestalt

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

mit einem geeigneten $\tau \in \mathbb{R}$, wodurch sich für die gemeinsame Lotgerade

$$\ell = x_1 + \mathbb{R} \cdot \widetilde{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ergibt; folglich erhält man für den Lotfußpunkt x_2 die Darstellungen

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in \ell} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\in g_2}$$

mit geeigneten Parametern λ, $\mu \in \mathbb{R}$ und somit

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tau \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & -2 \\ 1 & -4 & -2 & 8 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{III+I}}{\overset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & -9 & -1 & 10 \\ 0 & 6 & -4 & -2 \end{array}\right) \underset{\text{II}\leftrightarrow\text{III}}{\overset{\text{III}\cdot\frac{1}{2}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -9 & -1 & 10 \end{array}\right) \overset{\text{III+3II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 7 \end{array}\right)$$

erhält man $\mu = -1$, $\lambda = -1$ und $\tau = 2$, so daß sich

$$x_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad x_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ergibt. Für die Lotgerade erhält man damit

$$\ell = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Es ist

$$d(g_1, g_2) = d(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\| = \left\| \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{42}.$$

48. In $\mathbb{R}^4$ sind die beiden Geraden $g = t_g + \mathbb{R} \cdot u_g$ und $h = t_h + \mathbb{R} \cdot u_h$ mit

$$t_g = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad u_g = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad t_h = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u_h = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

gegeben. Damit besitzt jeder Punkt P_g auf g die Gestalt

$$P_g = t_g + \alpha \cdot u_g = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+\alpha \\ -2-\alpha \\ 3+2\alpha \\ 5 \end{pmatrix}$$

für ein $\alpha \in \mathbb{R}$, und jeder Punkt P_h auf h ist von der Gestalt

$$P_h = t_h + \beta \cdot u_h = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2-\beta \\ 2-\beta \\ 3+3\beta \end{pmatrix}$$

für ein $\beta \in \mathbb{R}$; für den Verbindungsvektor $\widetilde{u} = \overrightarrow{P_g P_h}$ ergibt sich damit

$$\widetilde{u} = P_h - P_g = \begin{pmatrix} -1 \\ 2-\beta \\ 2-\beta \\ 3+3\beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4+\alpha \\ -2-\alpha \\ 3+2\alpha \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5-\alpha \\ 4+\alpha-\beta \\ -1-2\alpha-\beta \\ -2+3\beta \end{pmatrix},$$

und es gilt zum einen

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{P_g P_h} \perp g \iff \widetilde{u} \perp u_g \iff \widetilde{u} \circ u_g = 0 \iff \\ &\quad (-5-\alpha) \cdot 1 + (4+\alpha-\beta) \cdot (-1) + (-1-2\alpha-\beta) \cdot 2 + (-2+3\beta) \cdot 0 = 0 \\ &\qquad \iff -5-\alpha-4-\alpha+\beta-2-4\alpha-2\beta = 0 \iff -6\alpha-\beta = 11 \end{aligned}$$

und zum anderen

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{P_g P_h} \perp h \iff \widetilde{u} \perp u_h \iff \widetilde{u} \circ u_h = 0 \iff \\ &(-5-\alpha) \cdot 0 + (4+\alpha-\beta) \cdot (-1) + (-1-2\alpha-\beta) \cdot (-1) + (-2+3\beta) \cdot 3 = 0 \\ &\qquad \iff -4-\alpha+\beta+1+2\alpha+\beta-6+9\beta = 0 \iff \alpha+11\beta = 9. \end{aligned}$$

Damit steht der Verbindungsvektor $\overrightarrow{P_g P_h}$ genau dann sowohl auf g als auch auf h senkrecht, wenn die Parameter α und β das lineare Gleichungssystem

$$-6\alpha - \beta = 11 \qquad \text{und} \qquad \alpha + 11\beta = 9$$

lösen, wegen

$$\left(\begin{array}{cc|c} -6 & -1 & 11 \\ 1 & 11 & 9 \end{array}\right) \underset{\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{II}}{\leadsto} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 11 & 9 \\ -6 & -1 & 11 \end{array}\right) \underset{\mathrm{II}+6\mathrm{I}}{\leadsto}$$
$$\leadsto \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 11 & 9 \\ 0 & 65 & 65 \end{array}\right) \underset{\frac{1}{65}\cdot\mathrm{II}}{\leadsto} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 11 & 9 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\mathrm{I}-11\cdot\mathrm{II}}{\leadsto} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

also genau für $\alpha = -2$ und $\beta = 1$. Die sich ergebenden Punkte

$$P_g = \begin{pmatrix} 4 + (-2) \\ -2 - (-2) \\ 3 + 2 \cdot (-2) \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad P_h = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 - 1 \\ 2 - 1 \\ 3 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

sind die Lotfußpunkte der gemeinsamen Lotgeraden ℓ von g und h, so daß man für deren Abstand

$$\begin{aligned} d(g,h) = d(P_g, P_h) = \|P_h - P_g\| &= \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \\ &= \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9 + 1 + 4 + 1} = \sqrt{15} \end{aligned}$$

erhält.