MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2020
Blatt 11
22.07.2020

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“ — Bearbeitungsvorschlag —

41. Wir ergänzen den normierten Richtungsvektor der Drehachse

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{durch} \qquad b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

zu einer Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^3, \circ)$. Bei den zu betrachtenden Drehungen bleibt b_1 als Punkt der Drehachse fest, während sich die Wirkung dieser Drehung um den Winkel $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ in der von b_2 und b_3 aufgespannten Lotebene niederschlägt; für die darstellende Matrix M der Drehung bezüglich b_1, b_2, b_3 ergibt sich damit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D_\varphi \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R}) \qquad \text{mit} \qquad D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

also

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = M_1^\top.$$

Mit

$$P = (b_1, b_2, b_3) = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$$

gilt für die Abbildungsmatrix $A \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ dieser Drehung dann $M = P^\top A P$, also

$$\begin{aligned}
A_1 &= P M_1 P^\top \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{2} & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2+2\sqrt{3} & -2+2\sqrt{3} \\ 2-2\sqrt{3} & 2 & -2-2\sqrt{3} \\ -2-2\sqrt{3} & -2+2\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1+\sqrt{3} & -1+\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1 & -1-\sqrt{3} \\ -1-\sqrt{3} & -1+\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

sowie

$$A_2 = PM_2P^\top = PM_1^\top P^\top = A_1^\top = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1 & -1+\sqrt{3} \\ -1+\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

42. Die gegebene Matrix

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 7 \\ -1 & -8 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

ist wegen

$$A \cdot A^\top = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 7 \\ -1 & -8 & -4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{81}\begin{pmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix} = E_3$$

orthogonal; da sie zudem die Determinante

$$\det(A) = \frac{1}{9^3} \cdot \begin{vmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 7 \\ -1 & -8 & -4 \end{vmatrix} \underset{\text{III}-2\text{II}}{\overset{\text{I}-2\text{II}}{=}} \frac{1}{9^3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 9 & -18 \\ 4 & -4 & 7 \\ -9 & 0 & -18 \end{vmatrix} \underset{9 \text{ aus III}}{\overset{9 \text{ aus I}}{=}}$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 4 & -4 & 7 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} \frac{1}{9} \cdot [(0-7+0) - (-8+0-8)] = 1$$

besitzt, beschreibt die zugehörige lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x) = A \cdot x,$$

eine Drehung im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$. Die Drehachse a besteht aus allen Fixpunkten der Drehung und stimmt daher mit dem Eigenraum von A zum Eigenwert 1 überein; wegen

$$A - 1 \cdot E_3 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8-9 & 1 & -4 \\ 4 & -4-9 & 7 \\ -1 & -8 & -4-9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 4 & -13 & 7 \\ -1 & -8 & -13 \end{pmatrix} \underset{\text{III}+\text{I}}{\overset{\text{II}+4\text{I}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 0 & -9 & -9 \\ 0 & -9 & -9 \end{pmatrix} \underset{-\frac{1}{9}\cdot\text{II}}{\overset{(-1)\cdot\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -9 & -9 \end{pmatrix} \underset{\text{III}+9\text{II}}{\overset{\text{I}+\text{II}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist also etwa

$$u = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Richtungsvektor der Drehachse a, und für den Drehwinkel α gilt

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{Spur}(A) - 1}{2} = \frac{\frac{1}{9}(8-4-4) - 1}{2} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

43. a) Zu den gegebenen Vektoren

$$v_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

betrachten wir die Hilfsmatrix

$$B = (v_1, v_2, v_3) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3};$$

wegen $B^\top B = E_3$ ist die Matrix $B \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ orthogonal, so daß ihre Spalten v_1, v_2, v_3 eine Orthonormalbasis des euklidischen $\mathbb{R}^3$ bilden. Insbesondere ist v_1, v_2, v_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$, und nach dem Prinzip der linearen Fortsetzung gibt es genau eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\varphi(v_1) = e_1, \qquad \varphi(v_2) = e_2, \qquad \varphi(v_3) = e_3.$$

Für die Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ von φ gilt damit

$$A \cdot v_1 = \varphi(v_1) = e_1, \quad A \cdot v_2 = \varphi(v_2) = e_2, \quad A \cdot v_3 = \varphi(v_3) = e_3,$$

insgesamt also

$$A \cdot B = A \cdot (v_1, v_2, v_3) = (A \cdot v_1,\ A \cdot v_2,\ A \cdot v_3) = (e_1, e_2, e_3) = E_3,$$

und damit $A = B^{-1}$; da die Matrix B orthogonal ist, ist auch $A = B^\top$ eine orthogonale Matrix und folglich $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine orthogonale Abbildung.

b) Die Abbildungsmatrix

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

ist gemäß a) orthogonal, und es gilt

$$\det(A) = \frac{1}{3^3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$$
$$= \frac{1}{27} \cdot \big((8 + 8 + (-1)) - ((-4) + (-4) + (-4)) \big) = 1;$$

folglich beschreibt die orthogonale Abbildung φ eine Drehung. Die Drehachse a besteht aus allen Fixpunkten von φ und stimmt daher mit dem Eigenraum von A zum Eigenwert 1 überein; wegen

$$A - 1 \cdot E_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2-3 & 2 & -1 \\ 1 & -2-3 & -2 \\ -2 & 1 & -2-3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -5 & -2 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}-2\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}+\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \underset{-\frac{1}{3}\cdot\mathrm{II}}{\overset{(-1)\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}+3\mathrm{II}}{\overset{\mathrm{I}+2\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$a = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und für den Drehwinkel α gilt

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{Spur}(A) - 1}{2} = \frac{\frac{1}{3}(2-2-2)-1}{2} = -\frac{5}{6}.$$

44. Zu betrachten ist der euklidische $\mathbb{R}^3$; für eine Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sei

$$f_S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f_S(x) = S\,x,$$

die zugehörige lineare Abbildung.

a) Ist f_S eine Drehung um die x_2–Achse mit den Drehwinkel φ, so gilt (je nach gewähltem Drehsinn)

$$S = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \text{oder} \qquad S = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix};$$

für $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ergibt sich damit

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad \text{oder} \qquad S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

b) Die gegebene Ebene $E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ besitzt wegen

$$E = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid v \circ x\right\} \qquad \text{mit} \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

das orthogonale Komplement $E^\perp = R \cdot v$. Für $x \in \mathbb{R}^3$ betrachten wir die Zerlegung

$$x = \underbrace{u}_{\in E} + \underbrace{\widetilde{u}}_{\in E^\perp} \qquad \text{mit} \qquad \widetilde{u} = \lambda \cdot v \qquad \text{für ein} \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

woraus wegen

$$u = x - \lambda \cdot v = \begin{pmatrix} x_1 - \lambda \\ x_2 - \lambda \\ x_3 - \lambda \end{pmatrix} \in E$$

zunächst

$$(x_1 - \lambda) + (x_2 - \lambda) + (x_3 - \lambda) = 0,$$

also

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3\,\lambda \qquad \text{und damit} \qquad \lambda = \tfrac{1}{3}\,(x_1 + x_2 + x_3)$$

folgt. Somit ist

$$\begin{aligned}
s_E(x) &= u - \widetilde{u} = (x - \lambda \cdot v) - \lambda \cdot v = x - 2\lambda \cdot v \\
&= \begin{pmatrix} x_1 - \frac{2}{3} \cdot (x_1 + x_2 + x_3) \cdot 1 \\ x_2 - \frac{2}{3} \cdot (x_1 + x_2 + x_3) \cdot 1 \\ x_3 - \frac{2}{3} \cdot (x_1 + x_2 + x_3) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\, x_1 - \frac{2}{3}\, x_2 - \frac{2}{3}\, x_3 \\ -\frac{2}{3}\, x_1 + \frac{1}{3}\, x_2 - \frac{2}{3}\, x_3 \\ -\frac{2}{3}\, x_1 - \frac{2}{3}\, x_2 + \frac{1}{3}\, x_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = S \cdot x
\end{aligned}$$

mit

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

c) Die Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

ist wegen $S^\top S = E_3$ orthogonal, so daß f_S eine orthogonale Abbildung ist; wegen $\det(S) = -1$ ist f_S keine Drehung, und wegen $S^\top \neq S$ ist f_S keine Spiegelung.