Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“ — Bearbeitungsvorschlag —

25. a) Die gegebene Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

ist als symmetrische Matrix orthogonal diagonalisierbar und besitzt wegen

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=}$$

$$= \left(-\lambda\,(1-\lambda)^2 + 0 + 0\right) - \left(0 + (1-\lambda) + (1-\lambda)\right) =$$

$$= (1-\lambda)\cdot\left(-\lambda + \lambda^2 - 2\right) = -\,(\lambda-1)\,(\lambda+1)\,(\lambda-2)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ die drei einfachen Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ und $\lambda_3 = 2$.

b) Wegen

$$A - \lambda_1 E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-\text{I}}{\overset{\text{II}+\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{I}\leftrightarrow\text{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$, wegen

$$A - \lambda_2 E_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\text{II}-\frac{1}{2}\text{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-2\text{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = -1$, und wegen

$$A - \lambda_3 E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{II}+\text{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{III}+\text{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_3 = 2$; für die orthogonale Matrix

$$P = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \frac{v_3}{\|v_3\|} \right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = (\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

gilt dann $P^\top A P = D$.

26. a) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda E_4) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 7-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 6-\lambda & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&\underset{\text{2. Spalte}}{=} (7-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 4 \\ -2 & 6-\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&\underset{\text{III}+2\cdot\text{II}}{\overset{\text{I}-2\cdot\text{II}}{=}} (7-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 7-\lambda & -14+2\lambda & 0 \\ -2 & 6-\lambda & 2 \\ 7-\lambda & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} \\
&\underset{(7-\lambda)\text{ aus III}}{\overset{(7-\lambda)\text{ aus I}}{=}} (7-\lambda)\,(7-\lambda)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&\underset{\text{Sarrus}}{=} (7-\lambda)^3 \cdot \big((6-\lambda-4+0) - (0+0+4)\big) \\
&= (\lambda-7)^3 \cdot (\lambda+2);
\end{aligned}$$

damit besitzt A den einfachen Eigenwert $\lambda_1 = -2$ sowie den dreifachen Eigenwert $\lambda_2 = 7$.

b) Wegen

$$A - \lambda_1 E_4 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 8 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \underset{\frac{1}{9}\cdot\text{II}}{\overset{-\frac{1}{2}\cdot\text{III}\leftrightarrow\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -2 & 4 \\ 4 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \underset{\text{IV}-4\cdot\text{I}}{\overset{\text{III}-5\cdot\text{I}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 9 \\ 0 & 0 & 18 & 9 \end{pmatrix} \underset{\frac{1}{9}\cdot\text{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 18 & 9 \end{pmatrix} \underset{\text{IV}-9\cdot\text{III}}{\overset{\text{I}+2\cdot\text{III}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ eine Basis von $\mathrm{Eig}(A; \lambda_2)$ mit $\|v_1\| = \sqrt{9} = 3$; damit ist

$$b_1 = \frac{1}{\|v_1\|} \cdot v_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis von $\mathrm{Eig}(A; \lambda_1)$. Wegen

$$A - \lambda_2 E_4 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \underset{-\frac{1}{2}\cdot \mathrm{I}}{\overset{\mathrm{III}-\frac{1}{2}\cdot \mathrm{I},\ \mathrm{IV}+\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis von $\mathrm{Eig}(A; \lambda_2)$, und mit dem Gram–Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren ergibt sich zunächst $a_2 = v_2$ mit $\|a_2\| = 1$, also $b_2 = a_2$, dann

$$a_3 = v_3 - (v_3 \circ b_2) \cdot b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit

$$\|a_3\| = \sqrt{5}, \qquad \text{also} \qquad b_3 = \frac{1}{\|a_3\|} \cdot a_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und schließlich

$$\begin{aligned} a_4 &= v_4 - (v_4 \circ b_2) \cdot b_2 - (v_4 \circ b_3) \cdot b_3 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit

$$\|a_4\| = \frac{\sqrt{45}}{5}, \qquad \text{also} \qquad b_4 = \frac{1}{\|a_4\|} \cdot a_4 = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix};$$

damit ist b_2, b_3, b_4 eine Orthonormalbasis von $\mathrm{Eig}(A; \lambda_2)$.

c) Mit der orthogonalen Matrix

$$P = (b_1, b_2, b_3, b_4) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_4(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_3) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

gilt dann $P^\top A P = D$.

27. a) Die gegebene Matrix $M = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist gemäß $M^\top = M$ symmetrisch und damit orthogonal diagonalisierbar. Wegen

$$\chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)^2 - 3^2 = (1-\lambda)(7-\lambda)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt M die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 7$; wegen

$$M - \lambda_1 E_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-\text{I}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von M zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$, und wegen

$$M - \lambda_1 E_2 = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \underset{\text{III}+\text{I}}{\leadsto} \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von M zum Eigenwert $\lambda_2 = 7$. Folglich ist

$$\frac{1}{\|v_1\|} \cdot v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{\|v_2\|} \cdot v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis des euklidischen $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren von M.

b) Gemäß a) ist die Matrix $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ symmetrisch mit zwei positiven Eigenwerte, folglich also positiv definit; demnach wird durch $\sigma(x, y) = x^\top \cdot M \cdot y$ für alle x, $y \in \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt σ auf $\mathbb{R}^2$ definiert.

Die beiden in a) ermittelten Eigenvektoren v_1 und v_2 von M sind gemäß

$$\sigma(v_1, v_2) = v_1^\top \cdot \underbrace{M \cdot v_2}_{=7\cdot v_2} = 7 \cdot \underbrace{v_1^\top v_2}_{=0} = 0$$

auch bezüglich σ orthogonal, wobei sie wegen

$$\sigma(v_1, v_1) = v_1^\top \cdot \underbrace{M \cdot v_1}_{=1\cdot v_1} = 1 \cdot \underbrace{v_1^\top v_1}_{=2} = 2$$

und

$$\sigma(v_2, v_2) = v_2^\top \cdot \underbrace{M \cdot v_2}_{=7\cdot v_2} = 7 \cdot \underbrace{v_2^\top v_2}_{=2} = 14$$

bezüglich σ die Länge

$$\|v_1\|_\sigma = \sqrt{\sigma(v_1, v_1)} = \sqrt{2} \qquad \text{und} \qquad \|v_2\|_\sigma = \sqrt{\sigma(v_2, v_2)} = \sqrt{14}$$

besitzen. Folglich ist

$$\frac{1}{\|v_1\|_\sigma} \cdot v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{\|v_2\|_\sigma} \cdot v_2 = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$ bezüglich des Skalarprodukts σ.
Als alternativen Lösungsweg kann man auch die Standardbasis e_1, e_2 von $\mathbb{R}^2$ dem Gram–Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren unterwerfen; es ist zum einen

$$a_1 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \|a_1\|_\sigma = \sqrt{\sigma(a_1, a_1)} = \sqrt{4} = 2,$$

also

$$b_1 = \frac{1}{\|a_1\|_\sigma} \cdot a_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

und zum anderen

$$a_2 = e_2 - \sigma(e_2, b_1) \cdot b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit

$$\|a_2\|_\sigma = \sqrt{\sigma(a_2, a_2)} = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{7},$$

also

$$b_2 = \frac{1}{\|a_2\|_\sigma} \cdot a_2 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{14}\sqrt{7} \\ \frac{2}{7}\sqrt{7} \end{pmatrix}.$$

Folglich ist b_1, b_2 eine die Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$ bezüglich des Skalarprodukts σ.

28. Eine Matrix $A = (s_1, s_2, s_3, s_4) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ ist genau dann orthogonal, wenn ihre Spalten s_1, s_2, s_3, s_4 eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^4$ bezüglich des Standardskalarprodukts $\circ$ bilden; folglich sind die Matrizen A_1 und A_2 orthogonal, die Matrizen A_3 und A_4 wegen $s_1 \circ s_2 = 1 \neq 0$ aber nicht.

Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
\chi_{A_1}(\lambda) \quad &= \quad \det(A_1 - \lambda\, E_4) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \\
&\underset{\text{1. Zeile}}{=} \quad (-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & -\lambda \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \\
&\underset{\text{3. Zeile}}{=} \quad (-\lambda)^2 \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \left(\lambda^2 + 1\right) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \\
&= \quad \left(\lambda^2 + 1\right) \cdot \left((-\lambda)^2 - (-1)\right) = \left(\lambda^2 + 1\right)^2 > 0;
\end{aligned}$$

damit besitzt A_1 keinen reellen Eigenwert und ist damit insbesondere nicht reell diagonalisierbar; dagegen ist A_2 als symmetrische Matrix (orthogonal) diagonalisierbar. Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
\chi_{A_3}(\lambda) = \det(A_3 - \lambda\, E_4) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} &\underset{\text{matrix}}{\overset{\text{Dreiecks–}}{=}} \\
&= (1-\lambda) \cdot (2-\lambda) \cdot (3-\lambda) \cdot (4-\lambda);
\end{aligned}$$

damit besitzt A_3 die vier verschiedenen reellen Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$ und $\lambda_4 = 4$ und ist daher als 4×4–Matrix reell diagonalisierbar. Schließlich gilt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\chi_{A_4}(\lambda) = \det(A_4 - \lambda\, E_4) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{matrix}}{\overset{\text{Dreiecks–}}{=}} (1-\lambda)^4;$$

damit ist $\lambda_0 = 1$ der einzige Eigenwert der Matrix A_4; er besitzt die algebraische Vielfachheit $\alpha_0 = 4$, wegen

$$A_4 - \lambda_0 \cdot E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

aber nur die geometrische Vielfachheit

$$\gamma = 4 - \operatorname{Rang}\left(A_4 - \lambda_0 \cdot E_4\right) = 4 - 3 = 1,$$

weswegen A_4 nicht reell diagonalisierbar ist.