Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II" — Bearbeitungsvorschlag —

21. Das Standardskalarprodukt $\circ$ auf $\mathbb{R}^5$ ist $\sigma = \sigma_A$ mit $A = E_5$. Es ist

$$B = (E_5 v_1, E_5 v_2, E_5 v_3, E_5 v_4) = (v_1, v_2, v_3, v_4) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 4}$$

mit

$$B^\top = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{III}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{II}+\mathrm{I}}{\underset{\mathrm{III}-2\cdot\mathrm{III}}{\leadsto}}$$

$$\leadsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{-\frac{1}{3}\cdot\mathrm{II}\leftrightarrow\frac{1}{3}\cdot\mathrm{III}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{I}+2\cdot\mathrm{II}}{\underset{\mathrm{IV}-\mathrm{II}}{\leadsto}}$$

$$\leadsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{IV}-\mathrm{III}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis des orthogonalen Komplements $U^\perp$ von U. Das Gram–Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren liefert damit

$$a_1 = u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \|a_1\| = \sqrt{2}, \quad \text{also} \quad b_1 = \frac{1}{\|a_1\|} \cdot a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und damit

$$a_2 = u_2 - (u_2 \circ b_1) \cdot b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mit

$$\|a_2\| = \frac{1}{2}\sqrt{10}, \quad \text{also} \quad b_2 = \frac{1}{\|a_2\|} \cdot a_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\langle b_1, b_2 \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle$ bilden die Vektoren b_1, b_2 eine Orthonormalbasis von $U^\perp$ bezüglich des Standardskalarprodukts $\circ$ auf $\mathbb{R}^5$. Ferner ist

$$\dim(U) = \dim(\mathbb{R}^5) - \dim(U^\perp) = 5 - 2 = 3.$$

22. a) Auf dem $\mathbb{R}$–Vektorraum $\mathbb{R}^3$ ist die Bilinearform

$$\sigma : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \sigma(x, y) = x^\top A\, y, \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 5 & 29 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

zu betrachten; wegen $A^\top = A$ die Matrix A und damit auch die Bilinearform σ symmetrisch. Da die drei Hauptminoren

$$\det(A_1) = \det(1) = 1 > 0,$$

$$\det(A_2) = \det \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 29 \end{pmatrix} = 29 - 25 = 4 > 0,$$

$$\det(A_3) = \det \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 5 & 29 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix} = (232 + 5 + 5) - (29 + 1 + 200) = 12 > 0$$

positiv sind, ist nach dem Hauptminorenkriterium von Hurwitz die symmetrische Matrix A und damit auch die Bilinearform σ positiv definit; folglich ist σ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$.

b) Für den Untervektorraum

$$U = \mathbb{R} \cdot u_0 \subseteq \mathbb{R}^3 \qquad \text{mit} \qquad u_0 = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

ist das orthogonale Komplement $U^\perp$ von U in $\mathbb{R}^3$ bezüglich σ zu bestimmen; Mit der Hilfsmatrix

$$B = (A\, u_0) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 5 & 29 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$$

mit

$$B^\top = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 3}$$

erhält man

$$U^\perp = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid B^\top x = 0 \right\} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $U^\perp$ die x_1–x_2–Ebene in $\mathbb{R}^3$ mit den beiden Einheitsvektoren e_1, e_2 als (algebraischer) Basis; diese wird nun (bezüglich des Skalarprodukts σ) dem Gram–Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren unterworfen: damit erhalten wir zunächst

$$a_1 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \|a_1\|_\sigma = \sqrt{\sigma(a_1, a_1)} = 1,$$

also

$$b_1 = \frac{1}{\|a_1\|_\sigma} \cdot a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und danach

$$a_2 = e_2 - \sigma(e_2, b_1) \cdot b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit

$$\sigma(a_2, a_2) = \underbrace{\begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 5 & 29 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4,$$

also

$$\|a_2\|_\sigma = \sqrt{\sigma(a_2, a_2)} = 2 \qquad \text{und} \qquad b_2 = \frac{1}{\|a_2\|_\sigma} \cdot a_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\langle b_1, b_2 \rangle = \langle e_1, e_2 \rangle$ ist b_1, b_2 eine Orthonormalbasis von $U^\perp$ bezüglich des Skalarprodukt σ.

23. a) Der Spaltenraum $U \subseteq \mathbb{R}^4$ der gegebenen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

besitzt wegen

$$A \underset{\mathrm{III}-\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II}\leftrightarrow\mathrm{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{IV}+\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{IV}+\mathrm{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

die Dimension

$$\dim U = \operatorname{Rang} A = 3;$$

dabei bilden die erste, zweite und dritte Spalte

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad s_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

eine Basis von U, die nun (bezüglich dem Standardskalarprodukt $\circ$) dem Gram–Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren unterworfen wird: wir erhalten

$$a_1 = s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \|a_1\| = \sqrt{2}, \quad \text{also} \quad b_1 = \frac{1}{\|a_1\|} \cdot a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

damit

$$a_2 = s_2 - (s_2 \circ b_1) \cdot b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mit

$$\|a_2\| = \frac{1}{2}\sqrt{6}, \quad \text{also} \quad b_2 = \frac{1}{\|a_2\|} \cdot a_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

und damit

$$a_3 = s_3 - (s_3 \circ b_1) \cdot b_1 - (s_3 \circ b_2) \cdot b_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

mit

$$\|a_3\| = \frac{1}{3}\sqrt{12}, \quad \text{also} \quad b_3 = \frac{1}{\|a_3\|} \cdot a_3 = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist b_1, b_2, b_3 eine Orthonormalbasis von U.

b) Jeder Vektor $x \in \mathbb{R}^4$ besitzt eine eindeutige Darstellung

$$x = u + \widetilde{u} \qquad \text{mit} \quad u \in U \quad \text{und} \quad \widetilde{u} \in U^\perp;$$

dabei ist u die orthogonale Projektion von x in U, und mit der Orthonormalbasis von a) gilt

$$u = (x \circ b_1) \cdot b_1 + (x \circ b_2) \cdot b_2 + (x \circ b_3) \cdot b_3.$$

Speziell für den ersten Einheitsvektor $x = e \in \mathbb{R}^4$ gibt es wegen

$$e = (e - y) + y \qquad \text{für alle} \quad y \in \mathbb{R}^4$$

genau ein $y \in U^\perp$ mit $e - y \in U$; dabei ist

$$\begin{aligned} e - y &= (e \circ b_1) \cdot b_1 + (e \circ b_2) \cdot b_2 + (e \circ b_3) \cdot b_3 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{12}} \cdot \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \qquad \text{und damit} \qquad y = e - (e - y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alternativ läßt sich die Aufgabe auch über die explizite Bestimmung von $U^\perp$ lösen: gemäß a) ist $U = \langle s_1, s_2, s_3 \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$, und mit der Hilfsmatrix

$$B = (E_4\, s_1, E_4\, s_2, E_4\, s_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$$

ergibt sich

$$B^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-\text{I}}{\overset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{(-1)\text{II} \leftrightarrow \text{III}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{II}+\text{III}}{\overset{\text{I}-\text{III}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

und damit

$$U^\perp = \left\{x \in \mathbb{R}^4 \mid B^\top x = 0\right\} = \mathbb{R} \cdot w \qquad \text{mit} \qquad w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Für jedes $y \in U^\perp$ gilt also $y = \lambda \cdot w$ für ein geeignetes $\lambda \in \mathbb{R}$, und es gilt

$$\begin{aligned} e - y \in U \quad &\Longleftrightarrow \quad (e-y) \perp \widetilde{u} \quad \text{für alle} \quad \widetilde{u} \in U^\perp \\ &\underset{U^\perp = \langle w \rangle}{\Longleftrightarrow} \quad (e-y) \perp w \quad \Longleftrightarrow \quad (e-y) \circ w = 0; \end{aligned}$$

wegen

$$(e-y) \circ w = \begin{pmatrix} 1+\lambda \\ -\lambda \\ -\lambda \\ -\lambda \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -(1+\lambda) - \lambda - \lambda - \lambda = -1 - 4\lambda$$

erhält man

$$e - y \in U \iff -1 - 4\lambda = 0 \iff \lambda = -\frac{1}{4} \iff y = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

24. In einem euklidischen Vektorraum V mit dem Skalarprodukt σ wird für einen Unterraum $U \subseteq V$ das orthogonale Komplement

$$U^\perp = \{v \in V \mid \sigma(u,v) = 0 \quad \text{für alle} \quad u \in U\}$$

betrachtet; dies ist wiederum ein Unterraum von V. Dabei gilt für Unterräume U_1, $U_2 \subseteq V$ mit $U_1 \subseteq U_2$ wegen

$$\begin{aligned} v \in U_2^\perp \quad &\Longrightarrow \quad \sigma(u,v) = 0 \quad \text{für alle} \quad u \in U_2 \\ &\underset{U_1 \subseteq U_2}{\Longrightarrow} \quad \sigma(u,v) = 0 \quad \text{für alle} \quad u \in U_1 \\ &\Longrightarrow \quad v \in U_1^\perp \end{aligned}$$

schon $(*)$ $U_2^\perp \subseteq U_1^\perp$. Somit ergibt sich für Unterräume U, $W \subseteq V$ dann:

a) Wegen

$$U \subseteq U + W \qquad \text{und} \qquad W \subseteq U + W$$

gilt gemäß $(*)$

$$(U+W)^\perp \subseteq U^\perp \qquad \text{und} \qquad (U+W)^\perp \subseteq W^\perp,$$

zusammen also

$$(U+W)^\perp \subseteq U^\perp \cap W^\perp.$$

Für „$\supseteq$“ sei $v \in U^\perp \cap W^\perp$; damit gilt sowohl

$$v \in U^\perp, \qquad \text{also} \qquad \sigma(u,v) = 0 \quad \text{für alle} \quad u \in U,$$

als auch

$$v \in W^\perp, \qquad \text{also} \qquad \sigma(w,v) = 0 \quad \text{für alle} \quad w \in W.$$

Für alle $x \in U + W$ gibt es nun $u \in U$ und $w \in W$ mit $x = u + w$, so dass sich wegen der Linearität von σ im 1. Argument dann

$$\sigma(x,v) = \sigma(u+w,v) = \sigma(u,v) + \sigma(w,v) = 0 + 0 = 0$$

ergibt; damit ist aber $v \in (U+W)^\perp$.

b) Wegen

$$U \cap W \subseteq U \qquad \text{und} \qquad U \cap W \subseteq W$$

gilt gemäß $(*)$

$$U^\perp \subseteq (U \cap W)^\perp \qquad \text{und} \qquad W^\perp \subseteq (U \cap W)^\perp,$$

zusammen also

$$U^\perp + W^\perp \subseteq (U \cap W)^\perp.$$