Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“ — Bearbeitungsvorschlag —

17. a) Für $A = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ gilt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \underset{\text{II}-\text{I, III}-\text{I, IV}-\text{I}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{III}\cdot(-1)}{\overset{\text{II}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-\text{II}}{\overset{\text{I}-2\cdot\text{II}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{III}\cdot\frac{1}{4}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{II}-\text{III}}{\overset{\text{I}-\text{III}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

damit sind v_1, v_2, v_3 linear unabhängig mit $v_4 = v_1 + v_3$. Dementsprechend bilden die Vektoren v_1, v_2, v_3 eine Basis von $U = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$.

b) Wir wenden das Gram–Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die Basis v_1, v_2, v_3 von U an und erhalten zunächst

$$a_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \|a_1\| = \sqrt{4} = 2, \quad \text{also} \quad b_1 = \frac{1}{\|a_1\|} \cdot a_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

danach

$$a_2 = v_2 - (v_2 \circ b_1) \cdot b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit

$$\|a_2\| = \sqrt{6}, \quad \text{also} \quad b_2 = \frac{1}{\|a_2\|} \cdot a_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und schließlich

$$a_3 = v_3 - (v_3 \circ b_1) \cdot b_1 - (v_3 \circ b_2) \cdot b_2 =$$
$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit

$$\|a_3\| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}, \quad \text{also} \quad b_3 = \frac{1}{\|a_3\|} \cdot a_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\langle b_1, b_2, b_3 \rangle = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ ist b_1, b_2, b_3 eine Orthonormalbasis von U.

c) Es ist

$$v_4 = (v_4 \circ b_1) \cdot b_1 + (v_4 \circ b_2) \cdot b_2 + (v_4 \circ b_3) \cdot b_3 = 4\, b_1 + \sqrt{6}\, b_2 + 2\sqrt{3}\, b_3.$$

18. a) Zu betrachten ist die durch $\sigma(x, y) = x^\top A\, y$ für alle x, $y \in \mathbb{R}^3$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

definierte Bilinearform des $\mathbb{R}^3$; zunächst ist wegen $A^\top = A$ die Matrix A und damit auch die Bilinearform σ symmetrisch. Da die drei Hauptminoren

$$\det(A_1) = \det(1) = 1 > 0,$$
$$\det(A_2) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1 > 0,$$
$$\det(A_3) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = (6 + 0 + 0) - (0 + 0 + 3) = 3 > 0$$

positiv sind, ist nach dem Hauptminorenkriterium von Hurwitz die symmetrische Matrix A und damit auch die Bilinearform σ positiv definit; folglich ist σ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$. Mit der Bezeichnung $A = (a_{ij})_{i,j}$ gilt dabei

$$(*) \qquad \sigma(e_i, e_j) = e_i^\top \cdot A \cdot e_j = a_{ij}$$

für alle $i, j \in \{1, 2, 3\}$; dies geht in den folgenden Rechnungen mehrfach ein.

b) Wegen

$$\|e_1\|_\sigma = \sqrt{\sigma(e_1, e_1)} \underset{(*)}{=} \sqrt{1} = 1$$

und

$$\|e_2\|_\sigma = \sqrt{\sigma(e_2, e_2)} \underset{(*)}{=} \sqrt{2}$$

ergibt sich

$$\cos\left(\sphericalangle_\sigma(e_1,e_2)\right) = \frac{\sigma(e_1,e_2)}{\|e_1\|_\sigma \cdot \|e_2\|_\sigma} \underset{(*)}{=} \frac{1}{1\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

und damit $\sphericalangle_\sigma(e_1,e_2) = \frac{\pi}{4}$ bzw. $\sphericalangle_\sigma(e_1,e_2) = 45°$.

c) Wir wenden auf die Standardbasis

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

von $\mathbb{R}^3$ das Gram–Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren bezüglich des Skalarprodukts σ von a) an und erhalten im ersten Schritt

$$a_1 = e_1 \qquad \text{mit} \qquad \|a_1\|_\sigma = \sqrt{\sigma(a_1,a_1)} \underset{(*)}{=} \sqrt{1} = 1$$

und damit

$$b_1 = \frac{1}{\|a_1\|_\sigma}\cdot a_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},$$

im zweiten Schritt

$$a_2 = e_2 - \sigma(e_2,b_1)\cdot b_1 \underset{(*)}{=} \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - 1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

mit

$$\sigma(a_2,a_2) = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 1,$$

also $\|a_2\|_\sigma = \sqrt{\sigma(a_2,a_2)} = 1$, und damit

$$b_2 = \frac{1}{\|a_2\|_\sigma}\cdot a_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

sowie im dritten Schritt

$$\begin{aligned} a_3 = e_3 - \sigma(e_3,b_1)\cdot b_1 - \sigma(e_3,b_2)\cdot b_2 &\underset{(*)}{=} \\ &= \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - 0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - 0\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

mit

$$\|a_3\|_\sigma = \sqrt{\sigma(a_3,a_3)} \underset{(*)}{=} \sqrt{3}$$

und damit

$$b_3 = \frac{1}{\|a_3\|_\sigma} \cdot a_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit sind b_1, b_2, b_3 eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^3, \sigma)$ mit $\langle b_1 \rangle = \langle e_1 \rangle$ und $\langle b_1, b_2 \rangle = \langle e_1, e_2 \rangle$.

19. Die Vektorräume $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^4$ seien jeweils mit dem Standardskalarprodukt $\circ$ versehen.

a) Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist genau dann orthogonal, wenn ihre durch die gestellte Bedingung normierten Spalten aufeinander senkrecht stehen; dies läßt sich für eine beliebige Vorgabe der ersten Spalte x genau dadurch erreichen, daß als zweite Spalte $x^\perp$ oder $-x^\perp$ gewählt wird:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

b) Sei $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $|a_{ij}| = \frac{1}{\sqrt{3}}$ für alle i, $j \in \{1, 2, 3\}$. Damit gilt $a_{11}\, a_{12}$, $a_{21}\, a_{22}$, $a_{31}\, a_{32} \in \{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\}$ und damit

$$a_{11}\, a_{12} + a_{21}\, a_{22} + a_{31}\, a_{32} \in \{-1, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, 1\}.$$

Die ersten beiden Spalten von A stehen damit nicht senkrecht aufeinander, insbesondere kann A nicht orthogonal sein.

c) Sei $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ mit $a_{11} = a_{22} = a_{33} = \frac{2}{3}$ und $a_{12} = \frac{1}{3}$; damit bilden die Spalten s_1, s_2, s_3 sowie die Zeilen z_1, z_2, z_3 jeweils eine Orthonormalbasis. Wegen $\|s_2\| = 1$ folgt $a_{32}^2 = \frac{4}{9}$ und damit $a_{32} \in \{-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\}$.
Fall 1: $a_{32} = -\frac{2}{3}$. Wegen $\|z_1\| = 1$ ist $a_{13}^2 = \frac{4}{9}$, also $|a_{13}| = \frac{2}{3}$, und wegen $\|s_3\| = 1$ ist dann $a_{23}^2 = \frac{1}{9}$, also $|a_{23}| = \frac{1}{3}$; wegen $s_2 \perp s_3$ gilt $\frac{1}{3}\, a_{13} + \frac{2}{3}\, a_{23} = \frac{4}{9}$, woraus $a_{13} = \frac{2}{3}$ und $a_{23} = \frac{1}{3}$ folgt. Wegen $z_1 \perp z_2$ gilt $\frac{2}{3}\, a_{21} = -\frac{4}{9}$, also $a_{21} = -\frac{2}{3}$, und wegen $z_1 \perp z_3$ gilt $\frac{2}{3}\, a_{31} = -\frac{2}{9}$, also $a_{31} = -\frac{1}{3}$.
Fall 2: $a_{32} = \frac{2}{3}$. Wegen $\|z_1\| = 1$ ist $a_{13}^2 = \frac{4}{9}$, also $|a_{13}| = \frac{2}{3}$, und wegen $\|s_3\| = 1$ ist dann $a_{23}^2 = \frac{1}{9}$, also $|a_{23}| = \frac{1}{3}$; wegen $s_2 \perp s_3$ gilt $\frac{1}{3}\, a_{13} + \frac{2}{3}\, a_{23} = -\frac{4}{9}$, woraus $a_{13} = -\frac{2}{3}$ und $a_{23} = -\frac{1}{3}$ folgt. Wegen $z_1 \perp z_2$ gilt $\frac{2}{3}\, a_{21} = -\frac{4}{9}$, also $a_{21} = -\frac{2}{3}$, und wegen $z_1 \perp z_3$ gilt $\frac{2}{3}\, a_{31} = \frac{2}{9}$, also $a_{31} = \frac{1}{3}$.
Damit besitzt A notwendig die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \qquad \text{oder} \qquad \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix};$$

eine Probe bestätigt, daß die beiden angegebenen Matrizen auch tatsächlich orthogonal sind.

d) Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ ist genau dann orthogonal, wenn ihre durch die gestellte Bedingung normierten Spalten aufeinander senkrecht stehen; dies läßt sich genau dadurch erreichen, daß bei je zwei Spalten zwei Vorzeichen übereinstimmen und zwei Vorzeichen voneinander abweichen, also etwa

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

20. Für die beiden symmetrischen Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, wobei A den Rang n hat und B positiv definit ist, wird die Bilinearform

$$\sigma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \sigma(x,y) = x^\top \cdot M \cdot y, \quad \text{mit} \quad M = A \cdot B \cdot A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

betrachtet:

- Die Matrizen A und B sind symmetrisch, es gilt also $A^\top = A$ und $B^\top = B$, und damit ist wegen

$$M^\top = (A \cdot B \cdot A)^\top = A^\top \cdot B^\top \cdot A^\top = A \cdot B \cdot A = M$$

  auch die Matrix M symmetrisch; folglich ist die Bilinearform σ symmetrisch.

- Die Matrix B ist positiv definit, es gilt also $x^\top \cdot B \cdot x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ bzw. $x^\top \cdot B \cdot x \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\big(x^\top \cdot B \cdot x = 0 \Longrightarrow x = 0\big)$. Sei $y \in \mathbb{R}^n$, und mit $x = A \cdot y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned} y^\top \cdot M \cdot y = y^\top \cdot (A \cdot B \cdot A) \cdot y \underset{A=A^\top}{=} \big(y^\top \cdot A^\top\big) \cdot B \cdot (A \cdot y) = \\ = (A \cdot y)^\top \cdot B \cdot (A \cdot y) = x^\top \cdot B \cdot x \geq 0; \end{aligned}$$

  dabei folgt aus $y^\top \cdot M \cdot y = 0$, also $x^\top \cdot B \cdot x = 0$, schon $x = 0$, also $A \cdot y = 0$, und wegen $\mathrm{Rang}(A) = n$ ist A invertierbar, so daß sich $y = A^{-1} \cdot 0 = 0$ ergibt. Folglich ist die Matrix M und damit auch die Bilinearform σ positiv definit.

Damit ist σ eine symmetrische und positiv definite Bilinearform, also ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.