

Tutorium zur Vorlesung
„Lineare Algebra und analytische Geometrie II“
— **Bearbeitungsvorschlag** —

13. a) Es ist

$$\begin{aligned}\sigma_A(x, y) &= x^\top A y = (x_1 \ x_2 \ x_3) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \\ &= (x_1 \ x_2 \ x_3) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} y_3 \\ a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + a_{23} y_3 \\ a_{31} y_1 + a_{32} y_2 + a_{33} y_3 \end{pmatrix} = \\ &= a_{11} x_1 y_1 + a_{12} x_1 y_2 + a_{13} x_1 y_3 \\ &\quad + a_{21} x_2 y_1 + a_{22} x_2 y_2 + a_{23} x_2 y_3 \\ &\quad + a_{31} x_3 y_1 + a_{32} x_3 y_2 + a_{33} x_3 y_3\end{aligned}$$

b) Gemäß a) ist der Koeffizient a_{ij} von $x_i y_j$ der Eintrag in der i -ten Zeile und j -ten Spalte der Matrix A ; für die gegebenen Bilinearformen

- $\sigma_1(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + 2 x_3 y_3 - x_1 y_3 - x_3 y_1,$
- $\sigma_2(x, y) = x_1 y_1 + 2 x_2 y_2 + 3 x_3 y_3 + 4 x_1 y_2 + 5 x_1 y_3 + 6 x_2 y_3,$
- $\sigma_3(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_1 y_2 + x_1 y_3 - x_2 y_3,$
- $\sigma_4(x, y) = x_1 y_1 + 2 x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_3 + x_3 y_2$

von \mathbb{R}^3 ergibt sich demnach

$$\begin{aligned}A_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \text{und} & A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ A_3 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{und} & A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

c) Die Matrizen A_1 und A_4 sind (im Gegensatz zu den Matrizen A_2 und A_3) symmetrisch, so daß auch σ_1 und σ_4 (im Gegensatz zu σ_2 und σ_3) symmetrische Bilinearformen sind; wir untersuchen diese nun auf positive Definitheit mit Hilfe des Hauptminorenkriteriums nach Hurwitz: wegen

$$\det(A_{1,1}) = 1 > 0 \quad \text{und} \quad \det(A_{1,2}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

sowie

$$\det(A_{1,3}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{\text{2. Zeile}}{=} 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 > 0$$

ist die Matrix A_1 positiv definit und folglich σ_1 ein Skalarprodukt auf dem \mathbb{R}^3 , und wegen

$$\det(A_{4,1}) = 1 > 0 \quad \text{und} \quad \det(A_{4,2}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

sowie

$$\det(A_{4,3}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{Sarrus}}{=} (2 + 0 + 0) - (0 + 1 + 1) = 0$$

ist A_4 nicht positiv definit und folglich σ_4 auch kein Skalarprodukt auf dem \mathbb{R}^3 .

14. a) Für alle $s \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & s \\ 2 & s & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

symmetrisch und folglich σ_A eine symmetrische Bilinearform auf \mathbb{R}^3 . Nach dem Kriterium von Hurwitz ist A genau dann positiv definit, wenn die drei Hauptminoren

$$\det(A_1) = 2 \quad \text{und} \quad \det(A_2) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

sowie

$$\det(A_3) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & s \\ 2 & s & 4 \end{vmatrix} \stackrel{\text{Sarrus}}{=} (8 + 0 + 0) - (4 + 2s^2 + 0) = 4 - 2s^2$$

positiv sind, also genau für $s^2 < 2$. Damit ist σ_A genau dann ein Skalarprodukt auf \mathbb{R}^3 , wenn $s \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ gilt.

- b) Für die Matrix $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ gilt

$$\sigma_A(e_i, e_j) = e_i^\top A e_j = a_{ij}$$

für alle $i, j \in \{1, 2, 3\}$; folglich ist

$$\begin{aligned} \|e_1\| &= \sqrt{\sigma_A(e_1, e_1)} = \sqrt{2}, \\ \|e_2\| &= \sqrt{\sigma_A(e_2, e_2)} = \sqrt{1} = 1 \quad \text{und} \\ \|e_3\| &= \sqrt{\sigma_A(e_3, e_3)} = \sqrt{4} = 2 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\cos \sphericalangle(e_1, e_2) &= \frac{\sigma_A(e_1, e_2)}{\|e_1\| \cdot \|e_2\|} = \frac{0}{\sqrt{2} \cdot 1} = 0, \\ \cos \sphericalangle(e_1, e_3) &= \frac{\sigma_A(e_1, e_3)}{\|e_1\| \cdot \|e_3\|} = \frac{2}{\sqrt{2} \cdot 2} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad \text{und} \\ \cos \sphericalangle(e_2, e_3) &= \frac{\sigma_A(e_2, e_3)}{\|e_2\| \cdot \|e_3\|} = \frac{-1}{1 \cdot 2} = -\frac{1}{2},\end{aligned}$$

also

$$\sphericalangle(e_1, e_2) = \frac{\pi}{2} \text{ (bzw. } 90^\circ\text{)}, \quad \sphericalangle(e_1, e_3) = \frac{\pi}{4} \text{ (bzw. } 45^\circ\text{)}$$

und

$$\sphericalangle(e_2, e_3) = \frac{2\pi}{3} \text{ (bzw. } 120^\circ\text{)}.$$

c) Für einen Vektor $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\begin{aligned}e_1 \perp v &\iff \sigma_A(e_1, v) = 0 \iff e_1^\top Av = 0 \iff \\ &\iff (1 \ 0 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \\ &= (2 \ 0 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 2v_1 + 2v_3 = 0\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}e_3 \perp v &\iff \sigma_A(e_3, v) = 0 \iff e_3^\top Av = 0 \iff \\ &\iff (0 \ 0 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \\ &= (2 \ 1 \ 4) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 2v_1 + v_2 + 4v_3 = 0,\end{aligned}$$

so daß die gesuchten Vektoren genau die Lösungen des homogenen linearen Gleichungssystems mit der Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Pi-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \cdot \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

sind; damit ist etwa $v = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

15. a) Für alle $s \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \det(M) &= \begin{vmatrix} 1 & s & s^2 \\ s & 1 & s \\ s^2 & s & 1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{Sarrus}}{=} \\ &= ((1^3 + s \cdot s \cdot s^2 + s^2 \cdot s \cdot s) - (s^2 \cdot 1 \cdot s^2 + 1 \cdot s \cdot s + s \cdot s \cdot 1)) = \\ &= (1 + s^4 + s^4) - (s^4 + s^2 + s^2) = 1 - 2s^2 + s^4 = (1 - s^2)^2. \end{aligned}$$

b) Die Matrix M_s ist genau dann invertierbar, wenn $\det(M) \neq 0$ ist; dies ist wegen

$$\det(M) = 0 \iff (1 - s^2)^2 = 0 \iff s^2 = 1 \iff s = \pm 1$$

genau für $s \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ der Fall. Für alle $s \in \mathbb{R}$ ergibt sich für die zu M_s komplementäre Matrix

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_s &= \begin{pmatrix} +\det(M'_{11}) & -\det(M'_{21}) & +\det(M'_{31}) \\ -\det(M'_{12}) & +\det(M'_{22}) & -\det(M'_{32}) \\ +\det(M'_{13}) & -\det(M'_{23}) & +\det(M'_{33}) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 - s^2 & -s(1 - s^2) & 0 \\ -s(1 - s^2) & 1 - s^4 & -s(1 - s^2) \\ 0 & -s(1 - s^2) & 1 - s^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

so daß wir für alle $s \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ die zu M_s inverse Matrix

$$\begin{aligned} M_s^{-1} &= \frac{1}{\det(M_s)} \cdot \widetilde{M}_s = \\ &= \frac{1}{(1 - s^2)^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 - s^2 & -s(1 - s^2) & 0 \\ -s(1 - s^2) & 1 - s^4 & -s(1 - s^2) \\ 0 & -s(1 - s^2) & 1 - s^2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{1 - s^2} \begin{pmatrix} 1 & -s & 0 \\ -s & 1 + s^2 & -s \\ 0 & -s & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

erhalten.

c) Nach dem Kriterium von Hurwitz ist die symmetrische Matrix M_s genau dann positiv definit, wenn ihre drei Hauptminoren

$$\det(1) = 1 \quad \text{und} \quad \det \begin{pmatrix} 1 & s \\ s & 1 \end{pmatrix} = 1 - s^2$$

sowie

$$\det \begin{pmatrix} 1 & s & s^2 \\ s & 1 & s \\ s^2 & s & 1 \end{pmatrix} = (1 - s^2)^2$$

positiv sind; dies ist aber genau im Falle $1 - s^2 > 0$, also für $s \in]-1; 1[$.

16. a) Es ist

$$\cos \sphericalangle(\lambda v, \mu w) = \frac{\sigma(\lambda v, \mu w)}{\|\lambda v\| \cdot \|\mu w\|} = \frac{\lambda \mu \sigma(v, w)}{|\lambda| \cdot |\mu| \cdot \|v\| \cdot \|w\|} = \frac{\lambda \mu}{|\lambda \mu|} \cos \sphericalangle(v, w).$$

Dies legt die folgende Fallunterscheidung nahe:

- Für $\lambda \mu > 0$ ist

$$\cos \sphericalangle(\lambda v, \mu w) = \cos \sphericalangle(v, w),$$

also

$$\sphericalangle(\lambda v, \mu w) = \sphericalangle(v, w);$$

im Falle $\lambda, \mu > 0$ handelt es sich um dieselben Winkel, im Falle $\lambda, \mu < 0$ um (gleich große) Scheitelwinkel.

- Für $\lambda \mu < 0$ ist

$$\cos \sphericalangle(\lambda v, \mu w) = -\cos \sphericalangle(v, w),$$

also

$$\sphericalangle(\lambda v, \mu w) = \pi - \sphericalangle(v, w);$$

in diesem Fall handelt es sich um Nebenwinkel, die sich zu 180° ergänzen.

b) Es ist

$$\begin{aligned} \|v \pm w\|^2 &= \sigma(v \pm w, v \pm w) = \sigma(v, v \pm w) \pm \sigma(w, v \pm w) = \\ &= (\sigma(v, v) \pm \sigma(v, w)) \pm (\sigma(w, v) \pm \sigma(w, w)) = \\ &= \sigma(v, v) \pm 2\sigma(v, w) + \sigma(w, w) = \\ &= \|v\|^2 + \|w\|^2 \pm 2\|v\|\|w\|\cos \varphi. \end{aligned}$$

c) Unter Verwendung von b) ergibt sich

$$v \perp w \iff \sigma(v, w) = 0 \iff \cos \varphi = 0 \iff \|v \pm w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2.$$