MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2020
Blatt 3
27.05.2020

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“ — Bearbeitungsvorschlag —

9. a) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda\, E_2) = \begin{vmatrix} (2-a)-\lambda & a \\ -a & (2+a)-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (2-\lambda)-a & a \\ -a & (2-\lambda)+a \end{vmatrix} = \big((2-\lambda)-a\big)\cdot\big((2-\lambda)+a\big) - a\cdot(-a) =$$

$$= \big((2-\lambda)^2 - a^2\big) - (-a^2) = (2-\lambda)^2 - a^2 + a^2 = (2-\lambda)^2;$$

damit besitzt A nur einen Eigenwert, nämlich $\lambda_0 = 2$ der algebraischen Vielfachheit $\alpha_0 = 2$, und wegen

$$A - \lambda_0 E_2 = \begin{pmatrix} (2-a)-2 & a \\ -a & (2+a)-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & a \\ -a & a \end{pmatrix} \overset{\mathrm{II-I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

besitzt dieser die geometrische Vielfachheit

$$\gamma_0 = 2 - \mathrm{Rang}\,(A - \lambda_0 E_2) = \begin{cases} 2-1 = 1, & \text{falls } a \neq 0, \\ 2-0 = 2, & \text{falls } a = 0. \end{cases}$$

Nach dem Hauptsatz über diagonalisierbare Matrizen ist nun A genau dann diagonalisierbar, wenn $\alpha_0 = \gamma_0$ gilt, also im Falle $a = 0$.

10. a) Die in Abhängigkeit vom Parameter $c \in \mathbb{R}$ gegebene Matrix

$$M_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ c & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

besitzt das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} \chi_c(\lambda) &= \det(M_c - \lambda E_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & c \\ c & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &\underset{\text{2. Spalte}}{\overset{\text{Laplace}}{=}} (-1)^{2+2}\cdot(-1-\lambda)\cdot \begin{vmatrix} -\lambda & c \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1-\lambda)\cdot\big((-\lambda)^2 - c\big) = -(\lambda+1)\left(\lambda^2 - c\right) \end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

- Für $c < 0$ ist q mit $q(\lambda) = \lambda^2 - c > 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ eine quadratische Funktion ohne (reelle) Nullstelle; damit zerfällt χ_c nicht vollständig in (reelle) Linearfaktoren, so daß M_c nicht reell diagonalisierbar ist.
- Für $c = 0$ ist $\chi_c(\lambda) = -(\lambda + 1) \cdot \lambda^2$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, so daß $\lambda_2 = 0$ ein Eigenwert von M_0 der algebraischen Vielfachheit $\alpha_2 = 2$ ist; wegen
$$M_0 - \lambda_2 E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
ist $\operatorname{Rang}(M_0 - \lambda_2 E_3) = 2$, so daß $\lambda_2 = 0$ die geometrische Vielfachheit $\gamma_2 = 3-2 = 1$ besitzt. Wegen $\alpha_2 \neq \gamma_2$ ist M_0 nicht reell diagonalisierbar.
- Für $c > 0$ ist
$$\chi_c(\lambda) = -(\lambda + 1) \cdot \left(\lambda^2 - (\sqrt{c})^2\right) = -(\lambda + 1)(\lambda - \sqrt{c})(\lambda + \sqrt{c});$$
damit besitzt χ_c die Nullstellen
$$\lambda_1 = -1 \qquad \text{sowie} \qquad \lambda_2 = \sqrt{c} > 0 \quad \text{und} \quad \lambda_3 = -\sqrt{c} < 0.$$
Demnach besitzt die Matrix M_c für
$$\lambda_1 \neq \lambda_3 \iff -1 \neq -\sqrt{c} \iff \sqrt{c} \neq 1 \iff c \neq 1$$
drei verschiedene reelle Eigenwerte, ist also als 3×3–Matrix reell diagonalisierbar. Für $c = 1$ besitzt nun die Matrix M_1 den Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_3 = -1$ der algebraischen Vielfachheit $\alpha_1 = 2$ sowie den Eigenwert $\lambda_2 = 1$ der algebraischen Vielfachheit $\alpha_2 = 1$ (und damit auch der geometrischen Vielfachheit $\gamma_2 = 1$); wegen
$$M_1 - \lambda_1 E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}-\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}-\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
ist $\operatorname{Rang}(M_1 - \lambda_1 E_3) = 1$, so daß $\lambda_1 = -1$ auch die geometrische Vielfachheit $\gamma_1 = 3 - 1 = 2$ besitzt. Damit ist die Matrix M_1 reell diagonalisierbar.

b) Für $c = 4$ besitzt die Matrix $M_4 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gemäß a) die drei verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = -2$. Wegen
$$M_4 - \lambda_1 E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}-\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}-4\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{I}-4\mathrm{II},\ \mathrm{III}+3\mathrm{II}}{\overset{-\frac{1}{15}\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
ist $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von M_4 zum Eigenwert $\lambda_1 = -1$, wegen
$$M_4 - \lambda_2 E_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}+\frac{1}{2}\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}+2\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von M_4 zum Eigenwert $\lambda_2 = 2$, und wegen

$$M_4 - \lambda_3 E_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}-\frac{1}{2}\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}-2\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von M_4 zum Eigenwert $\lambda_3 = -2$. Mit der invertierbaren Matrix

$$P = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

gilt dann $P^{-1} M_4 P = D$.

11. a) Der gegebene Endomorphismus $f : V \to V$ des Vektorraums $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ besitzt wegen

$$f(A_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot A_1 + 1 \cdot A_2 + 0 \cdot A_3 + 0 \cdot A_4$$

$$f(A_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot A_1 + 1 \cdot A_2 + 0 \cdot A_3 + 0 \cdot A_4$$

$$f(A_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2 + 1 \cdot A_3 + 1 \cdot A_4$$

$$f(A_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2 + 0 \cdot A_3 + 1 \cdot A_4$$

bezüglich der Basis A_1, A_2, A_3, A_4 von $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ die darstellende Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

b) Wegen

$$\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda\, E_4) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{matrix}}{\overset{\text{Dreiecks-}}{=}} (1-\lambda)^4$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt genau einen Eigenwert, nämlich $\lambda_1 = 1$ der algebraischen Vielfachheit $\alpha_1 = 4$, und wegen

$$M - \lambda_1\, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ergibt sich für die geometrische Vielfachheit

$$\gamma_1 = 4 - \operatorname{Rang}(M - \lambda_1\, E_4) = 4 - 2 = 2.$$

Wegen $\gamma_1 < \alpha_1$ ist die darstellende Matrix M und folglich auch der Endomorphismus f nicht diagonalisierbar.

12. a) Die Aussage ist richtig: ist nämlich $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A, so gilt $\det(A - \lambda \cdot E_n) = 0$; damit ist aber auch $\det\left((A - \lambda \cdot E_n)^\top\right) = 0$. Wegen

$$(A - \lambda \cdot E_n)^\top = A^\top - (\lambda \cdot E_n)^\top = A^\top - \lambda \cdot E_n$$

folgt daraus $\det(A^\top - \lambda \cdot E_n) = 0$, somit ist λ auch ein Eigenwert von $A^\top$.

b) Die Aussage ist falsch: als Gegenbeispiel betrachten wir etwa die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2};$$

es ist zwar $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ wegen

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \cdot x$$

ein Eigenvektor von A, wegen

$$A^\top \cdot x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \mathbb{R} \cdot x$$

aber kein Eigenvektor von $A^\top$.

c) Die Aussage ist richtig: ist nämlich A diagonalisierbar, so gibt es eine invertierbare Matrix $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $D = P^{-1}AP$; damit ergibt sich aber

$$D^\top = \left(P^{-1}AP\right)^\top = P^\top A^\top \left(P^{-1}\right)^\top$$

mit

$$D^\top = D \qquad \text{und} \qquad P^\top \left(P^{-1}\right)^\top = \left(P^{-1}P\right)^\top = E_n^\top = E_n.$$

Folglich ist die Matrix $Q = \left(P^{-1}\right)^\top \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ invertierbar mit $Q^{-1} = P^\top$, und wir erhalten

$$D = D^\top = P^\top A^\top \left(P^{-1}\right)^\top = Q^{-1} A^\top Q;$$

somit ist auch $A^\top$ diagonalisierbar.