Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“ — Bearbeitungsvorschlag —

5. Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda\, E_4) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{1. Zeile}}{=}$$

$$= (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{1. Spalte}}{=}$$

$$= (1-\lambda)^2 \cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 \cdot (2-\lambda);$$

wegen

$$\chi_A(\lambda) = 0 \iff \lambda = 1 \quad \text{oder} \quad \lambda = 2$$

besitzt A genau die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$. Wegen

$$A - \lambda_1\, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sind $b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraums $\operatorname{Eig}(A; \lambda_1)$ von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$, und wegen

$$A - \lambda_2\, E_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $b_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraums $\operatorname{Eig}(A; \lambda_2)$ von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 2$;

damit bilden b_1, b_2, b_3, b_4 eine Basis von $\mathbb{R}^4$. Mit der invertierbaren Matrix

$$P = (b_1, b_2, b_3, b_4) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

gilt dann $P^{-1}AP = D$.

6. Es ist

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda\, E_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & r & s \\ 0 & 1-\lambda & t \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (1-\lambda)^2\,(-1-\lambda) = -(\lambda-1)^2\,(\lambda+1)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$; damit besitzt A die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ mit $\alpha_1 = 2$ und $\lambda_2 = -1$ mit $\alpha_2 = 1$ (und damit auch $\gamma_2 = 1$). Wegen

$$A - \lambda_1 E_3 = \begin{pmatrix} 0 & r & s \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt

$$\mathrm{Rang}(A - \lambda_1 E_3) = \begin{cases} 1, & \text{falls } r = 0, \\ 2, & \text{falls } r \neq 0; \end{cases}$$

A ist genau dann diagonalisierbar, wenn $\gamma_1 = 2$, also $\mathrm{Rang}(A - \lambda_1 E_3) = 1$ gilt, also für $r = 0$. In diesem Falle ist etwa $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Basis von $\mathrm{Eig}(A; \lambda_1)$, und wegen $A - \lambda_2 E_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & s \\ 0 & 2 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist $b_3 = \begin{pmatrix} -s \\ -t \\ 2 \end{pmatrix}$ eine Basis von $\mathrm{Eig}(A; \lambda_2)$. Mit

$$P = (b_1, b_2, b_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -s \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$$

gilt dann

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. a) Wegen

$$f(e_1) = 2 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 \quad \text{und} \quad f(e_2) = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2$$

ist

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die darstellende Matrix von f bezüglich e_1, e_2. Es ist

$$g(e_1) = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2,$$

und wegen $e_2 = e_1 - (e_1 - e_2)$ ergibt sich

$$g(e_2) = g(e_1) - g(e_1 - e_2) = e_1 - c \cdot (e_1 - e_2) = (1 - c) \cdot e_1 + c \cdot e_2;$$

damit ist

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 - c \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

die darstellende Matrix von g bezüglich e_1, e_2. Des weiteren ist

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 - c \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 - 2\,c \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

die darstellende Matrix von $f \circ g$ bezüglich e_1, e_2.

b) Es ist $f \circ g = \ell_{A \cdot B}$ genau dann diagonalisierbar wenn die Matrix $A \cdot B$ diagonalisierbar ist. Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ist

$$\chi_{A \cdot B}(\lambda) = \det(A \cdot B - \lambda E_2) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 2 - 2\,c \\ 0 & c - \lambda \end{vmatrix} = \\ = (2 - \lambda)\,(c - \lambda) = (\lambda - 2)\,(\lambda - c);$$

dies motiviert die folgende Fallunterscheidung:

- Für $c \neq 2$ besitzt $A \cdot B$ die beiden verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = c$; damit ist $A \cdot B$ bzw. $f \circ g$ diagonalisierbar.
- Für $c = 2$ ist $\chi_{A \cdot B}(x) = (\lambda - 2)^2$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Damit besitzt $A \cdot B$ den einzigen Eigenwert $\lambda = 2$ mit $\alpha = 2$, und wegen

  $$A \cdot B - \lambda E_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  ist $\operatorname{Rang}(A \cdot B - \lambda E_2) = 1$ und folglich $\gamma = 1$. Somit ist $A \cdot B$ bzw. $f \circ g$ nicht diagonalisierbar.

8. a) Es ist $\lambda = 0$ genau dann ein Eigenwert der Matrix A, wenn $\lambda = 0$ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot E_n)$ ist, also für $\det(A) = 0$. Folglich ist $\lambda = 0$ genau dann kein Eigenwert von A, wenn $\det(A) \neq 0$ gilt, was jedoch zur Invertierbarkeit von A gleichwertig ist.

b) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so gibt es einen Eigenvektor $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ mit $A\,x = \lambda\,x$; damit ergibt sich

$$A^2\,x = (A\,A)\,x = A\,(A\,x) = A\,(\lambda\,x) \underset{\lambda\in\mathbb{R}}{=} \lambda\,(A\,x) = \lambda\,(\lambda\,x) = \lambda^2\,x,$$

so daß $x \neq 0$ auch ein Eigenvektor der Matrix A^2 zum Eigenwert λ^2 ist. Ist zudem A invertierbar, so ist gemäß a) der Eigenwert $\lambda \neq 0$, und wir erhalten

$$x = E_n\,x = \left(A^{-1}\,A\right)x = A^{-1}\,(A\,x) = A^{-1}\,(\lambda\,x) \underset{\lambda\in\mathbb{R}}{=} \lambda\,\left(A^{-1}\,x\right),$$

wegen $\lambda \neq 0$ also

$$A^{-1}\,x = \lambda^{-1}\,x;$$

damit ist $x \neq 0$ auch ein Eigenvektor der Matrix A^{-1} zum Eigenwert λ^{-1}.

c) Der Nachweis, daß mit der Matrix A auch ihr Quadrat A^2 reell diagonalisierbar ist, läßt sich etwa durch eine der folgenden Überlegungen erbringen:

- Ist A reell diagonalisierbar, so gibt es eine Basis $b_1, \ldots, b_n$ von $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren von A; seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die zugehörigen Eigenwerte. Gemäß b) sind $b_1, \ldots, b_n$ auch Eigenvektoren von A^2 zu den Eigenwerten $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2$, es ist also $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren von A^2; damit ist A^2 reell diagonalisierbar.
- Ist A reell diagonalisierbar, also ähnlich zu einer reellen Diagonalmatrix, so gibt es eine invertierbare Matrix $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $D = P^{-1}AP$. Damit gilt

$$D^2 = \left(P^{-1}AP\right)^2 = P^{-1}A\underbrace{P\cdot P^{-1}}_{=E_n}AP = P^{-1}A^2P,$$

  so daß A^2 ähnlich zur Diagonalmatrix $D^2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist; folglich ist A^2 reell diagonalisierbar.

d) Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

besitzt wegen

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 \neq 0$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ keinen reellen Eigenwert, ist also insbesondere nicht reell diagonalisierbar; dagegen ist ihr Quadrat

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

bereits eine Diagonalmatrix, insbesondere also reell diagonalisierbar.