

## Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“ — Bearbeitungsvorschlag —

1. a) Es ist  $x \in \mathbb{R}^3$  mit  $x \neq 0$  und

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} 5 & -11 & 7 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3 & -9 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} = 12 \cdot x;$$

damit ist  $x$  ein Eigenvektor der Matrix  $A$  zum Eigenwert  $\lambda_x = 12$ .

- b) Für  $\lambda = 4$  gilt

$$\begin{aligned} A - \lambda E_3 &= \begin{pmatrix} 5-4 & -11 & 7 \\ -2 & 2-4 & 2 \\ 3 & -9 & 9-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -11 & 7 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & -9 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{II}+\text{2}\cdot\text{I} \\ \text{III}-\text{3}\cdot\text{I} \end{array} \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -11 & 7 \\ 0 & -24 & 16 \\ 0 & 24 & -16 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{III}+\cdot\text{II} \\ \text{II}\cdot(-\frac{1}{8}) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -11 & 7 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und damit

$$\text{Rang}(A - \lambda E_3) = 2 < 3;$$

damit ist  $\lambda = 4$  ein Eigenwert der Matrix  $A$  mit dem Eigenraum

$$\text{Eig}(A; 4) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. • Für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda E_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (1-\lambda)(3-\lambda) - (-4) = \lambda^2 - 4\lambda + 7 = (\lambda - 2)^2 + 3 > 0; \end{aligned}$$

damit besitzt  $\chi_A$  keine Nullstelle und folglich  $A$  keinen Eigenwert.

- Für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt

$$\begin{aligned}
 \chi_B(\lambda) &= \det(B - \lambda E_3) = \begin{vmatrix} 6 - \lambda & -2 & -2 \\ 8 & -2 - \lambda & -4 \\ 2 & -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} \\
 &\stackrel{\substack{\text{I}-2 \cdot \text{III} \\ \text{II}-4 \cdot \text{III}}}{=}}{\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 & -4 + 2\lambda \\ 0 & 2 - \lambda & -8 + 4\lambda \\ 2 & -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix}} \\
 &\stackrel{\substack{(2-\lambda) \text{ aus I} \\ (2-\lambda) \text{ aus II}}}{=}}{(2 - \lambda)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix}} \\
 &\stackrel{\text{Sarrus}}{=} (2 - \lambda)^2 \cdot [(1 - \lambda) - (-4 + 4)] = -(\lambda - 2)^2 (\lambda - 1);
 \end{aligned}$$

damit besitzt  $B$  die beiden Eigenwerte  $\lambda_1 = 2$  und  $\lambda_2 = 1$ . Wegen

$$B - \lambda_1 E_3 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 8 & -4 & -4 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{I} \leftrightarrow \text{III}]{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \\ 8 & -4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}-4\text{I}]{\substack{\text{II}-2\text{I} \\ \rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  eine Basis von  $\text{Eig}(B; \lambda_1)$ , und wegen

$$B - \lambda_2 E_3 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 8 & -3 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}-\frac{2}{5}\text{I}]{\substack{\text{II}-\frac{8}{5}\text{I} \\ \rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II} \cdot 5]{\substack{\text{III}+\text{II} \\ \rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist  $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$  eine Basis von  $\text{Eig}(B; \lambda_2)$ .

- Für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt

$$\begin{aligned}
 \chi_C(\lambda) &= \det(C - \lambda E_4) = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 9 - \lambda & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 8 - \lambda & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 5 - \lambda \end{vmatrix} \\
 &\stackrel{\text{2. Zeile}}{=} (9 - \lambda) \cdot \begin{vmatrix} 5 - \lambda & -2 & 4 \\ -2 & 8 - \lambda & 2 \\ 4 & 2 & 5 - \lambda \end{vmatrix} \\
 &\stackrel{\substack{\text{I}-2 \cdot \text{II} \\ \text{III}+2 \cdot \text{II}}}{=}}{(9 - \lambda) \cdot \begin{vmatrix} 9 - \lambda & -18 + 2\lambda & 0 \\ -2 & 8 - \lambda & 2 \\ 0 & 18 - 2\lambda & 9 - \lambda \end{vmatrix}} \\
 &\stackrel{\substack{(9-\lambda) \text{ aus I} \\ (9-\lambda) \text{ aus III}}}{=}}{(9 - \lambda)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 8 - \lambda & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}} \\
 &= (9 - \lambda)^3 \cdot [(8 - \lambda) - (4 + 4)] = \lambda (\lambda - 9)^3;
 \end{aligned}$$

damit besitzt  $C$  die beiden Eigenwerte  $\lambda_1 = 0$  und  $\lambda_2 = 9$ . Wegen

$$\begin{aligned}
 C - \lambda_1 E_4 &= \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 8 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{9} \cdot \text{II}]{\text{I} \leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \text{III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -2 & 4 \\ 4 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV} - 4\text{I}]{\text{III} - 5\text{I}} \\
 &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 9 \\ 0 & 0 & 18 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III} \cdot \frac{1}{9}]{\text{IV} - \text{III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 18 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV} - 9\text{III}]{\text{I} + 2\text{III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \text{ist } \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} &\text{ eine Basis von } \text{Eig}(C; \lambda_1), \text{ und wegen}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C - \lambda_2 E_4 &= \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \text{ist } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &\text{ eine Basis von } \text{Eig}(C; \lambda_2).
 \end{aligned}$$

3. Für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt

$$\begin{aligned}
 \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_3) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} \stackrel{=}{=} \underset{1. \text{ Zeile}}{\dots} \\
 &= (1 - \lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda) \cdot [(1 - \lambda)^2 - 1^2] = \\
 &= (1 - \lambda) \cdot [-\lambda \cdot (2 - \lambda)] = -\lambda(1 - \lambda)(2 - \lambda);
 \end{aligned}$$

wegen

$$\chi_A(\lambda) = 0 \iff \lambda = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda = 1 \quad \text{oder} \quad \lambda = 2$$

besitzt  $A$  genau die drei einfachen Eigenwerte  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 1$  und  $\lambda_3 = 2$  und ist damit als  $3 \times 3$ -Matrix diagonalisierbar. Wegen

$$A - \lambda_1 E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III} - \text{I}]{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III} - \text{II}]{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist  $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  ein Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda_1 = 0$ , wegen

$$A - \lambda_2 E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{I} \leftrightarrow \text{III}]{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist  $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  ein Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda_1 = 1$ , und wegen

$$A - \lambda_3 E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}+\text{I}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}+\text{II}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist  $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  ein Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda_3 = 2$ .

Damit ist  $v_1, v_2, v_3$  eine Basis von  $\mathbb{R}^3$  aus Eigenvektoren der Matrix  $A$  zu den Eigenwerten  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , so daß sich mit der invertierbaren Matrix

$$P = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

die Beziehung  $D = P^{-1}AP$  ergibt.

4. Der gegebene Endomorphismus  $f : V \rightarrow V$  des Vektorraums  $V$  besitzt wegen

$$\begin{aligned} f(v_1) &= v_2 = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4 \\ f(v_2) &= v_3 = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4 \\ f(v_3) &= v_4 = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 1 \cdot v_4 \\ f(v_4) &= v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4 \end{aligned}$$

bezüglich der Basis  $v_1, v_2, v_3, v_4$  von  $V$  die darstellende Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4};$$

dabei ist ein Vektor

$$v = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \alpha_3 \cdot v_3 + \alpha_4 \cdot v_4 \in V$$

genau dann ein Eigenvektor des Endomorphismus  $f$  zum Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{R}$ , wenn sein Koordinatenvektor

$$p(v) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

bezüglich der Basis  $v_1, v_2, v_3, v_4$  ein Eigenvektor der darstellenden Matrix  $M$  zum Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist. Wegen

$$\begin{aligned} \chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda E_4) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \stackrel{\text{1. Zeile}}{=} \\ &= (-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{Dreiecks-}}{\text{matrizen}} \\ &= (-\lambda) \cdot (-\lambda)^3 - 1 \cdot 1^3 = \lambda^4 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda^2 + 1) \end{aligned}$$

für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  besitzt  $M$  genau zwei Eigenwerte, nämlich  $\lambda_1 = 1$  und  $\lambda_2 = -1$ ; wegen

$$\begin{aligned} M - \lambda_1 E_4 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \stackrel{\text{II}+\text{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \stackrel{\text{III}+\text{II}}{\rightsquigarrow} \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \stackrel{\text{IV}+\text{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ist der Koordinatenvektor

$$p(b_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

eine Basis für den Eigenraum  $\text{Eig}(M; \lambda_1)$  der Matrix  $M$  zum Eigenwert  $\lambda_1 = 1$ , und wegen

$$\begin{aligned} M - \lambda_2 E_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{\text{III}-\text{II}}{\rightsquigarrow} \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{\text{IV}-\text{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ist der Koordinatenvektor

$$p(b_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

eine Basis für den Eigenraum  $\text{Eig}(M; \lambda_2)$  der Matrix  $M$  zum Eigenwert  $\lambda_1 = -1$ .  
Folglich besitzt auch der Endomorphismus  $f : V \rightarrow V$  genau die beiden Eigenwerte  $\lambda_1 = 1$  und  $\lambda_2 = -1$ , und für die beiden Eigenräume ergibt sich

$$\text{Eig}(f; \lambda_1) = \mathbb{R} \cdot b_1 \quad \text{mit der Basis} \quad b_1 = v_1 + v_2 + v_3 + v_4$$

und

$$\text{Eig}(f; \lambda_2) = \mathbb{R} \cdot b_2 \quad \text{mit der Basis} \quad b_2 = -v_1 + v_2 - v_3 + v_4.$$

Damit gibt es nur zwei linear unabhängige Eigenvektoren von  $f$ , insbesondere also keine Basis des 4-dimensionalen Vektorraums  $V$  aus Eigenvektoren von  $f$ ; damit ist  $f$  nicht diagonalisierbar.