MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2020
Blatt 10
17.07.2020

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“

37. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2011).* Sei $\sigma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Spiegelung an der Ebene
$$E = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \subseteq \mathbb{R}^3.$$
Man berechne die reelle Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $\sigma(x) = A \cdot x$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$.

38. Im euklidischen $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt $\circ$ werde der von den Vektoren
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$
erzeugte Untervektorraum $U = \langle v_1, v_2 \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$ betrachtet.
   a) Man bestimme für U und $U^\perp$ jeweils eine Orthonormalbasis.
   b) Man berechne die Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ für die Spiegelung an U.

39. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2014).* Gegeben seien die Matrizen
$$S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \qquad \text{und} \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$
   a) Man zeige, daß ℓ_S eine Spiegelung beschreibt, und berechne die Spiegelebene.
   b) Man bestimme die Eigenwerte der Matrix $A = SDS$.

40. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2007).* Gegeben seien
$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \qquad \text{und} \qquad F = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$
Man betrachte $\varphi = \sigma \circ \delta$, wobei $\sigma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Spiegelung an der Ebene
$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2\,x - y - z = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$
und $\delta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Spiegelung an der Geraden $g = \mathbb{R} \cdot v \subseteq \mathbb{R}^3$ beschreibt.
   a) Man zeige, daß $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Abbildungsmatrix F besitzt.
   b) Man zeige, daß φ die Spiegelung an einer Ebene ist, und gebe eine Gleichung für die Spiegelungsebene von φ an.

Abgabe bis Freitag, den 24. Juli 2020, 16^{00} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).