MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2020
Blatt 9
10.07.2020

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“

33. Man betrachte den euklidischen $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt $\circ$.

    a) Man zeige, daß der Endomorphismus

    $$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x) = A \cdot x, \quad \text{mit} \quad A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

    eine Geradenspiegelung beschreibt, und bestimme die Spiegelachse.

    b) Man bestimme die Abbildungsmatrix $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so daß der Endomorphismus $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x) = B \cdot x$, die Geradenspiegelung an der Spiegelachse $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ beschreibt.

    c) Man zeige, daß die Hintereinanderausführung $g \circ f$ eine Drehung beschreibt, und bestimme den Drehwinkel.

34. Im euklidischen $(\mathbb{R}^2, \circ)$ seien $v = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} -13 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben.

    a) Man bestimme alle orthogonalen Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(v) = w$ und gebe die Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $f = \ell_A$ an.

    b) Welche geometrische Bedeutung besitzen die in a) ermittelten Abbildungen?

35. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2010).*

    a) Man bestimme die Eigenwerte und alle Eigenvektoren der Matrix

    $$S = \begin{pmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

    b) Man begründe, daß die Matrix $\frac{1}{25}S$ die Spiegelung an der von $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^2$ aufgespannten Ursprungsgeraden beschreibt.

36. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2009).* Die Spiegelung an der Geraden $2\,x - y = 0$ in der Ebene ist eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Man berechne die darstellende Matrix von f bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$.

Abgabe bis Freitag, den 17. Juli 2020, 16^{00} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).