MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2020
Blatt 8
03.07.2020

# Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“

29. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2010).* Gegeben seien die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \qquad \text{sowie} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$
Man zeige, daß $v_1$ ein Eigenvektor von $A$ ist, und bestimme alle Eigenwerte von $A$ sowie eine orthogonale Matrix $P \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$, so daß $P^\top AP$ Diagonalgestalt hat.

30. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.
    a) Man zeige, daß $-1$ ein Eigenwert von $A$ ist, und bestimme alle Eigenwerte und Eigenräume von $A$.
    b) Man bestimme eine orthogonale Matrix $P \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$, so daß $P^\top AP$ Diagonalgestalt besitzt.
    c) Man finde eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $A = B^3$.

31. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2012).*
    a) Für $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ zeige man die Gültigkeit der Beziehung
    $$SM^2S^{-1} = \left(SMS^{-1}\right)^2.$$
    b) Für eine diagonalisierbare Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit nur nicht–negativen Eigenwerten zeige man, daß eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existiert mit $A^2 = B$.
    c) Man bestimme eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $A^2 = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ 9 & -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

32. Man betrachte die durch $f_0 = 0$ und $f_1 = 1$ sowie $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ für $n \geq 2$ rekursiv definierte Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.
    a) Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung
    $$\begin{pmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{pmatrix} = F^n \qquad \text{mit} \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$
    b) Man bestimme eine orthogonale Matrix $P \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, so daß $P^\top FP$ eine Diagonalgestalt besitzt.
    c) Man finde mit Hilfe von a) und b) eine explizite Darstellung der Fibonaccizahlen $f_n$ mit $n \in \mathbb{N}_0$.

**Abgabe** bis Freitag, den 10. Juli 2020, $16^{00}$ Uhr (Kästen vor der Bibliothek).