MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2020
Blatt 7
26.06.2020

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“

25. Gegeben sei die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

   a) Man bestimme das charakteristische Polynom sowie die Eigenwerte von A.
   b) Man bestimme für jeden Eigenraum von A jeweils eine Orthonormalbasis.
   c) Man gebe eine orthogonale Matrix $P \in \mathrm{O}_4(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit $P^\top A\,P = D$ an.

26. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2011).* Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

   a) Man zeige, daß A nur die Eigenwerte ± 2 besitzt.
   b) Man bestimme eine orthogonale Matrix P, die die Matrix A diagonalisiert.

27. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2014).* Im euklidischen $\mathbb{R}^4$, versehen mit dem Standardskalarprodukt $\circ$, sei der von den Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

aufgespannte Untervektorraum $U = \langle u_1, u_2 \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$ gegeben.

   a) Man bestimme eine Basis des orthogonalen Komplements $U^\perp$ von U in $\mathbb{R}^4$.
   b) Man bestimme für U und $U^\perp$ jeweils eine Orthonormalbasis.
   c) Man bestimme unter Verwendung von a) und b) eine reelle symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, die U als Eigenraum zum Eigenwert -1 und $U^\perp$ als Eigenraum zum Eigenwert 2 hat.

28. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2009).* Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

a) Man berechne die Eigenwerte von A und eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^2, \circ)$ aus Eigenvektoren von A.

b) Man bestimme eine orthogonale Matrix $P \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit
$$P^{-1} \cdot A \cdot P = D.$$

c) Man folgere aus b), daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}.$$

d) Man zeige mit c)
$$A^n = 5^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 2^{n+2} + 1 & 2^{n+1} - 2 \\ 2^{n+1} - 2 & 2^n + 4 \end{pmatrix} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Abgabe bis Freitag, den 3. Juli 2020, 16^{00} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).