MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2020
Blatt 6
19.06.2020

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“

21. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2007).* Im reellen Vektorraum $\mathbb{R}^4$ seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

sowie der von v_1, v_2 und v_3 aufgespannte Unterraum $U = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ gegeben.

a) Man zeige, daß v_1, v_2 eine Basis von U ist, und stelle v_3 als Linearkombination von v_1 und v_2 dar.

b) Man ergänze v_1, v_2 zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

c) Man bestimme (bezüglich des Standardskalarprodukts auf $\mathbb{R}^4$) eine Orthonormalbasis für das orthogonale Komplement $U^\perp$ von U in $\mathbb{R}^4$.

22. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2016).* Man betrachte den euklidischen $\mathbb{R}^4$, versehen mit dem Standardskalarprodukt $\circ$.

a) Man bestimme eine Orthonormalbasis für den Lösungsraum $E \subseteq \mathbb{R}^4$ des homogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{array}$$

b) Man bestimme eine Orthonormalbasis für das orthogonale Komplement $E^\perp$ von E in $\mathbb{R}^4$.

c) Es sei nun $P_E : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ P_E(x) = M\,x,$ die orthogonale Projektion auf E. Man bestimme eine orthogonale Matrix $T \in O_4(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit $M = TDT^{-1}$.

23. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2017).* Es seien $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Man bestimme alle orthogonalen Matrizen $Q \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit

$$Q\,(a + \lambda\, b) = -a + \lambda\, b \qquad \text{für alle} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

24. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2016).* Es sei $V = \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$–Vektorraum der reellen Polynome f mit $\mathrm{Grad}(f) \leq 2$.

a) Man zeige, daß die Abbildung

$$\sigma : V \times V \to \mathbb{R}, \quad \sigma(f,g) = f(0)\,g(0) + f(1)\,g(1) + f(2)\,g(2),$$

ein Skalarprodukt auf V ist.

b) Man bestimme eine Orthonormalbasis von (V, σ).

Abgabe bis Freitag, den 26. Juni 2020, 16^{00} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).