MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2020
Blatt 5
12.06.2020

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“

17. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2010).* Die lineare Hülle W der Vektoren

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

ist ein Unterraum des euklidischen $(\mathbb{R}^4, \circ)$. Man berechne eine Orthonormalbasis von W und bestimme damit die Abbildungsmatrix der Orthogonalprojektion $p : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ auf den Unterraum W.

18. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2000).* Auf dem reellen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ sei durch

$$\sigma(x, y) = x_1 y_1 + 3 x_2 y_2 + 4 x_3 y_3 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_1 y_3 + x_3 y_1 + x_2 y_3 + x_3 y_2$$

für x, $y \in \mathbb{R}^3$ eine Bilinearform $\sigma : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben.

a) Man zeige, daß σ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Man konstruiere im euklidischen Vektorraum $(\mathbb{R}^3, \sigma)$ eine Orthonormalbasis für den Unterraum $U = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ von $\mathbb{R}^3$.

19. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

a) Man zeige, daß σ_A ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Man bestimme bezüglich σ_A die Längen der Einheitsvektoren e_1, e_2, e_3 sowie die von ihnen eingeschlossenen Winkel.

c) Man berechne eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^3, \sigma_A)$.

d) Man gebe eine invertierbare Matrix $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ mit $A = P^\top P$ an.

20. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2006).* Für invertierbare Matrizen A, B und $C \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ beweise oder widerlege man jede der folgenden sechs Aussagen.

a) A und B symmetrisch $\Longrightarrow$ $A \cdot B$ symmetrisch.

b) A symmetrisch $\Longrightarrow$ A^{-1} symmetrisch.

c) A symmetrisch $\Longrightarrow$ $C^\top A\, C$ symmetrisch.

d) A und B orthogonal $\Longrightarrow$ $A \cdot B$ orthogonal.

e) A orthogonal $\Longrightarrow$ A^{-1} orthogonal.

f) A orthogonal $\Longrightarrow$ $C^\top A\, C$ orthogonal.

Abgabe bis Freitag, den 19. Juni 2020, 16^{00} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).