MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2020
Blatt 4
05.06.2020

# Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“

13. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2010).* Gegeben sei die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

    a) Man zeige, daß durch $\sigma_B(x,y) = x^\top B\,y$ für alle $x$, $y \in \mathbb{R}^3$ ein Skalarprodukt $\sigma_B$ auf $\mathbb{R}^3$ definiert wird.

    b) Man berechne den Winkel, den die beiden Vektoren $e_1$ und $e_2 \in \mathbb{R}^3$ bezüglich des in a) definierten Skalarprodukts $\sigma_B$ einschließen.

14. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2011).* Man zeige, daß es auf dem reellen Vektorraum $\mathbb{R}^2$ genau ein Skalarprodukt $\sigma : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gibt, bezüglich dem die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

    eine Orthonormalbasis bilden, und gebe $\sigma(x,y)$ für $x$, $y \in \mathbb{R}^2$ explizit an.

15. Für den Vektorraum $V = \mathbb{R}^{n\times n}$ betrachte man die durch

$$\sigma(A,B) = \mathrm{Spur}(A\,B) \qquad \text{und} \qquad \tau(A,B) = \mathrm{Spur}(A^\top B) \qquad \text{für } A,\, B \in V$$

    definierten Abbildungen $\sigma : V \times V \to \mathbb{R}$ und $\tau : V \times V \to \mathbb{R}$.

    a) Man zeige, daß $\sigma$ und $\tau$ symmetrische Bilinearformen auf $V$ sind.

    b) Man überprüfe, ob $\sigma$ und $\tau$ Skalarprodukte auf $V$ sind.

16. Sei $(V,\sigma)$ ein euklidischer Vektorraum. Man zeige für alle $v$, $w \in V$:

    a) $\sigma(v,w) = \frac{1}{4}\,\|v+w\|^2 - \frac{1}{4}\,\|v-w\|^2$

    b) $2\,(\|v\|^2 + \|w\|^2) = \|v+w\|^2 + \|v-w\|^2$ *(Parallelogrammgleichung)*

    c) $v \perp w \iff \|v+w\| = \|v-w\|$

    d) $\|v+w\| = \|v\| + \|w\| \iff w = 0$ oder $v = \lambda\, w$ für ein $\lambda \geq 0$

**Abgabe** bis Freitag, den 12. Juni 2020, $16^{00}$ Uhr (Kästen vor der Bibliothek).