

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“

5. a) (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2010*). Man bestimme das charakteristische Polynom der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

und entscheide, ob M diagonalisierbar ist.

- b) (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2013*). Man zeige, daß die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ -18 & 8 & 3 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

diagonalisierbar ist, und bestimme eine Basis von \mathbb{R}^3 bestehend aus Eigenvektoren von A .

6. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 2005*). Gegeben sei die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}.$$

- a) Man zeige, daß die Zahlen 1 und -1 Eigenwerte der Matrix A sind, und bestimme die geometrischen Vielfachheiten dieser Eigenwerte.
b) Man berechne das charakteristische Polynom von A .
c) Man entscheide, ob A diagonalisierbar ist.

7. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 2011*). Die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

sind Eigenvektoren einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ zu den Eigenwerten $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = -1$. Man berechne eine mögliche Matrix A .

8. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2013*). Für fest gewählte Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ betrachte man die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad X \mapsto AX - XB.$$

Man zeige:

- a) Ist $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von B^\top zum Eigenwert μ , so ist

$$\begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 \end{pmatrix} = x \cdot y^\top$$

ein Eigenvektor von f zum Eigenwert $\lambda - \mu$.

- b) Haben A und B einen gemeinsamen Eigenwert, so gibt es eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \setminus \{0\}$ mit $AC = CB$.

Abgabe bis Freitag, den 29. Mai 2020, 16⁰⁰ Uhr (Kästen vor der Bibliothek).