

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“

1. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 2017*). Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \quad \text{sowie} \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

- Man zeige, daß $\lambda = -1$ ein Eigenwert von A der geometrischen Vielfachheit $\gamma = 2$ ist, und bestimme eine Basis v_1, v_2 des zugehörigen Eigenraums.
- Man zeige, daß $w \in \mathbb{R}^4$ ein Eigenvektor von A ist, und bestimme den zugehörigen Eigenwert.
- Man zeige, daß v_1, v_2, w, e_1 eine Basis von \mathbb{R}^4 ist, und bestimme die darstellende Matrix M des Endomorphismus ℓ_A von \mathbb{R}^4 bezüglich dieser Basis.

2. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 2004*). Man bestimme alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

und entscheide, ob A ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist.

3. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2014*). Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}.$$

Man berechne das charakteristische Polynom von A . Man zeige, daß A diagonalisierbar ist, und bestimme eine Basis des \mathbb{R}^4 aus Eigenvektoren von A .

4. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 2010*). Gegeben sei der Endomorphismus

$$f : \text{Pol}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Pol}_3(\mathbb{R}), \quad p(X) \mapsto \frac{1}{2}(p(X+1) + p(X-1)).$$

- Man bestimme die darstellende Matrix von f bezüglich der Standardbasis $1, X, X^2, X^3$ von $\text{Pol}_3(\mathbb{R})$.
- Man zeige: genau die Polynome $p \neq 0$ vom Grad ≤ 1 sind Eigenvektoren von f .