MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2016
Klausur
12.10.2016

Wiederholungsklausur zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“

1. In Abhängigkeit vom reellen Parameter $c \in \mathbb{R}$ sei die Matrix

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & c & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ c & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

gegeben.

a) Man untersuche die Matrix A_c (in Abhängigkeit von c) auf reelle Diagonalisierbarkeit. (3)

b) Man bestimme für $c = 4$ eine invertierbare Matrix $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $P^{-1}A_4P = D$. (3)

2. a) Für einen Untervektorraum U eines euklidischen Vektorraums (V, σ) mit $\dim(V) < \infty$ definiere man die Begriffe „Orthonormalbasis von U“ und „orthogonales Komplement $U^\perp$ von U in V“. (2)

b) Im euklidischen $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt $\circ$ werde der von den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

erzeugte Untervektorraum $U = \langle v_1, v_2 \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$ betrachtet.

- Man bestimme für U und $U^\perp$ jeweils eine Orthonormalbasis. (2)
- Man berechne die Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ für die Spiegelung s_U am Untervektorraum U. (2)

3. a) Für eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definiere man die Begriffe „A ist orthogonal.“ und „A ist orthogonal diagonalisierbar.“ (2)

b) Man gebe einen Beweis für die aus der Vorlesung bekannte Aussage: jede orthogonal diagonalisierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist symmetrisch. (2)

c) Man zeige, daß jede symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, die nur die Eigenwerte -1 und 1 besitzt, bereits orthogonal ist. (2)

4. a) Im euklidischen Raum $(\mathbb{R}^3, \circ)$ seien die Punkte

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad d = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

gegeben; ferner sei E die von a, b und c aufgespannte Ebene.

- Man bestimme eine Gleichung für die Ebene E. (1)
- Man zeige, daß der Punkt d von der Ebene E den Abstand 7 besitzt. (1)
- Man entscheide, ob die Ebene E eine Gerade g enthält, von welcher der Punkt d den Abstand 5 besitzt, und begründe die Entscheidung. (1)

b) In der euklidischen Ebene $(\mathbb{R}^2, \circ)$ seien die Punkte

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

gegeben. Man zeige, daß es genau eine Drehung

$$d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad d(x) = D \cdot x + t,$$

gibt, welche a_1 auf b_1 und a_2 auf b_2 abbildet, und bestimme die Matrix $D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und den Vektor $t \in \mathbb{R}^2$ sowie das Drehzentrum z. (3)