MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2016
Blatt 11
29.06.2016

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II”

41. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2011).* Im $\mathbb{R}^3$ seien die beiden Ebenen

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid -6\,x + 4\,y - 10\,z = -20 \right\}$$

und

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda,\, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

gegeben.

a) Man gebe eine Parameterdarstellung für die Schnittgerade der beiden Ebenen E_1 und E_2 an.

b) Man zeige, daß der Punkt

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

in der Ebene E_2 liegt. Man gebe eine Parameterdarstellung für die Gerade g an, welche im Punkt P senkrecht auf der Ebene E_2 steht.

c) In welchem Punkt durchstößt die Gerade g die Ebene E_1?

42. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2012).* Im $\mathbb{R}^3$ betrachte man die Ebene

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y = -1 \right\}$$

und zu gegebenem $\lambda \in \mathbb{R}$ die Teilmenge

$$g_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - \lambda z = -1 \;\text{ und }\; -2x - 3y + \lambda z = 1 + \lambda \right\}.$$

a) Man zeige, daß g_λ für jede Wahl von $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Gerade ist, und gebe sie in Parameterform an.

b) Man bestimme alle $\lambda \in \mathbb{R}$, so daß E und g_λ einen nichtleeren Schnitt haben, und berechne diesen jeweils.

43. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2013).* Im $\mathbb{R}^4$ seien für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die Ebenen

$$E_\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Man bestimme alle $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, für die sich E_α und F_α schneiden.

44. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2007).* In Abhängigkeit von den beiden Parametern a, $b \in \mathbb{R}$ sei $L \subseteq \mathbb{R}^4$ die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & (2-b)\,x_2 & - & 2\,x_3 & & & = & 1-b \\ & & x_2 & - & 2\,x_3 & + & x_4 & = & a-1 \\ 2\,x_1 & - & 2\,b\,x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 3-a-2\,b \end{array}$$

a) Man zeige: L ist die Gerade

$$\left\{ (1,1,1,a)^\top + \lambda \cdot (b,1,1,1)^\top \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

b) Nun sei $H \subseteq \mathbb{R}^4$ die Hyperebene mit der Gleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

Für welche Wahl der Parameter a und b ist

(i) $L \subset H$; *(ii)* $L \cap H$ ein Punkt; *(iii)* $L \cap H$ leer?