Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II"

37. Man bestimme die Abbildungsmatrix für eine Drehung im euklidischen Vektorraum $(\mathbb{R}^3, \circ)$ mit der Drehachse $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und dem Drehwinkel $\varphi = \frac{3\pi}{4}$.

38. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2010).* Man zeige, daß die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x) = A \cdot x, \quad \text{mit} \quad A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 7 \\ -1 & -8 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

eine Drehung im $\mathbb{R}^3$ beschreibt. Man bestimme für diese Drehung einen Richtungsvektor der Drehachse und den Cosinus des Drehwinkels.

39. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2009).* Es seien

$$v_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

   a) Man zeige, daß es genau eine orthogonale Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\varphi(v_1) = e_1$, $\varphi(v_2) = e_2$ und $\varphi(v_3) = e_3$ gibt.
   b) Man zeige, daß die Abbildung φ eine Drehung ist, und bestimme Drehachse und Cosinus des Drehwinkels.

40. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2004).* Die linearen Abbildungen $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ seien durch

$$\varphi(e_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2), \quad \varphi(e_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2), \quad \varphi(e_3) = e_3$$

und

$$\psi(e_1) = e_1, \quad \psi(e_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 + e_3), \quad \psi(e_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 - e_3)$$

gegeben. Man zeige, daß $\tau = \psi \circ \varphi$ eine Drehung ist, und bestimme die Drehachse und den Cosinus des Drehwinkels von τ.