MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2016
Blatt 7
31.05.2016

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II"

25. In $(\mathbb{R}^3, \circ)$ seien $u_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{6} \end{pmatrix}$ gegeben.

   a) Für $U = \langle u_1, u_2 \rangle$ bestimme man $U^\perp$ sowie eine Orthonormalbasis von U.

   b) Für $W = \langle w \rangle$ bestimme man eine Orthonormalbasis von $W^\perp$ und ergänze diese zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$.

26. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2008).* Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

   Man gebe eine orthogonale Matrix $P \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ an, so daß $P^\top A P$ Diagonalgestalt besitzt.

27. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2013).* Gegeben sei die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

   a) Man begründe, daß M orthogonal diagonalisierbar ist, und bestimme eine Orthonormalbasis des euklidischen $\mathbb{R}^2$ (versehen mit dem Standardskalarprodukt) aus Eigenvektoren von M.

   b) Man zeige, daß durch $\sigma(x, y) = x^\top M y$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$ ein Skalarprodukt σ auf $\mathbb{R}^2$ definiert wird, und bestimme eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$ bezüglich dieses Skalarprodukts σ.

28. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2007).* Man untersuche die folgenden Matrizen auf Orthogonalität und reelle Diagonalisierbarkeit:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}; \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$