MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2016
Blatt 6
24.05.2016

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II"

21. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2010).* Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

   a) Man berechne die Eigenwerte der Matrix A.

   b) Man bestimme eine orthogonale Matrix $P \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $P^\top AP = D$.

22. Gegeben sei die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

   a) Man bestimme das charakteristische Polynom sowie die Eigenwerte von A.

   b) Man bestimme für jeden Eigenraum von A jeweils eine Orthonormalbasis.

   c) Man gebe eine orthogonale Matrix $P \in \mathrm{O}_4(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit $P^\top AP = D$ an.

23. a) Man bestimme alle $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ mit $|a_{ij}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ für alle $i, j \in \{1, 2\}$.

   b) Gibt es ein $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ mit $|a_{ij}| = \frac{1}{\sqrt{3}}$ für alle $i, j \in \{1, 2, 3\}$?

   c) Man gebe alle $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ mit $a_{11} = a_{22} = a_{33} = \frac{2}{3}$ und $a_{12} = \frac{1}{3}$ an.

   d) Man gebe ein $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathrm{O}_4(\mathbb{R})$ mit $|a_{ij}| = \frac{1}{2}$ für alle $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ an.

24. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2006).* Es seien A, B und C invertierbare reelle 2×2–Matrizen. Man beweise oder widerlege durch ein Gegenbeispiel jede der folgenden sechs Aussagen.

   a) A und B symmetrisch $\Longrightarrow$ $A \cdot B$ symmetrisch.

   b) A symmetrisch $\Longrightarrow$ A^{-1} symmetrisch.

   c) A symmetrisch $\Longrightarrow$ $C^\top AC$ symmetrisch.

   d) A und B orthogonal $\Longrightarrow$ $A \cdot B$ orthogonal.

   e) A orthogonal $\Longrightarrow$ A^{-1} orthogonal.

   f) A orthogonal $\Longrightarrow$ $C^\top AC$ orthogonal.