# Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“

17. Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

a) Man zeige, daß $v_1$, $v_2$, $v_3$ eine Basis von $U = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ ist.

b) Man bestimme eine Orthonormalbasis $b_1$, $b_2$, $b_3$ von $U$ bezüglich des Standardskalarprodukts $\circ$.

c) Man stelle $v_4$ als Linearkombination von $b_1$, $b_2$, $b_3$ dar.

18. Sei $\circ$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^5$ sowie $U = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle \subseteq \mathbb{R}^5$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Man bestimme eine Orthonormalbasis von $U^\perp$ sowie $\dim(U)$.

19. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2005).* Für $n \in \mathbb{N}$ sei die $n \times n$–Matrix

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix} = \left(\min\{i,j\}\right)_{i,j=1,\dots,n}$$

gegeben.

a) Man zeige, daß durch $\sigma(x,y) = x^\top A_n\, y$ für $x$, $y \in \mathbb{R}^n$ ein Skalarprodukt $\sigma$ auf dem $\mathbb{R}^n$ erklärt ist.

b) Man berechne eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ bezüglich des Skalarprodukts $\sigma$ mit $\sigma(x,y) = x^\top A_3\, y$ für $x$, $y \in \mathbb{R}^3$.

20. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2013).* Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrische Matrizen; weiter habe $A$ den Rang $n$, und $B$ sei positiv definit. Man zeige, daß die Bilinearform $\sigma$ mit $\sigma(x,y) = x^\top ABA\, y$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ ist.