

## Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“

13. a) Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

betrachte man die Bilinearform  $\sigma_A : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem Vektorraum  $\mathbb{R}^3$  und bestimme  $\sigma_A(x, y) = x^\top A y$  allgemein für

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

b) Man gebe für die Bilinearformen

- $\sigma_1(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + 2 x_3 y_3 - x_1 y_3 - x_3 y_1,$
- $\sigma_2(x, y) = x_1 y_1 + 2 x_2 y_2 + 3 x_3 y_3 + 4 x_1 y_2 + 5 x_1 y_3 + 6 x_2 y_3,$
- $\sigma_3(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_1 y_2 + x_1 y_3 - x_2 y_3,$
- $\sigma_4(x, y) = x_1 y_1 + 2 x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_3 + x_3 y_2$

des  $\mathbb{R}^3$  die entsprechenden Matrizen  $A_1, A_2, A_3, A_4 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  gemäß a) an.

c) Befindet sich unter den bei b) betrachteten Bilinearformen auch ein Skalarprodukt auf dem  $\mathbb{R}^3$ ?

14. Für den Parameter  $s \in \mathbb{R}$  sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & s \\ 2 & s & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

gegeben.

- a) Man bestimme alle  $s \in \mathbb{R}$ , für die  $\sigma_A$  ein Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^3$  ist.
- b) Für  $s = -1$  bestimme man bezüglich  $\sigma_A$  die Längen der Einheitsvektoren  $e_1, e_2, e_3$  sowie die von ihnen eingeschlossenen Winkel.
- c) Für  $s = 1$  bestimme man einen Vektor  $0 \neq v \in \mathbb{R}^3$ , der bezüglich  $\sigma_A$  sowohl zu  $e_1$  als auch  $e_3$  orthogonal ist.

15. (Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2007). In Abhängigkeit vom reellen Parameter  $s \in \mathbb{R}$  sei die symmetrische Matrix

$$M_s = \begin{pmatrix} 1 & s & s^2 \\ s & 1 & s \\ s^2 & s & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

gegeben.

- a) Man zeige  $\det(M_s) = (1 - s^2)^2$  für alle  $s \in \mathbb{R}$ .
  - b) Für welche  $s \in \mathbb{R}$  ist  $M_s$  invertierbar? Man gebe in diesen Fällen auch die zu  $M_s$  inverse Matrix  $M_s^{-1}$  an.
  - c) Für welche  $s \in \mathbb{R}$  ist  $M_s$  positiv definit?
16. Sei  $(V, \sigma)$  ein euklidischer Vektorraum sowie  $v, w \in V \setminus \{0\}$  mit  $\varphi = \sphericalangle(v, w)$ .

- a) Für  $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  bestimme man  $\sphericalangle(\lambda v, \mu w)$  und deute das Ergebnis geometrisch.
- b) Man zeige den *Cosinussatz*:

$$\|v \pm w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 \pm 2 \|v\| \|w\| \cos \varphi.$$

- c) Man zeige den *Satz des Pythagoras*:

$$v \perp w \iff \|v \pm w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2.$$