MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2016
Blatt 2
26.04.2016

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“

5. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 1997).* Man überprüfe, ob die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

diagonalisierbar ist, und gebe gegebenenfalls eine Matrix $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ an, so daß $P^{-1}AP$ Diagonalgestalt besitzt.

6. Für welche Werte von a, b, $c \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

diagonalisierbar? Man gebe in diesen Fällen auch eine Matrix $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ an, welche A diagonalisiert.

7. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2001).* Es seien e_1, e_2 die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ sowie c ein reeller Parameter. Die Endomorphismen f und g von $\mathbb{R}^2$ seien durch

$$f(e_1) = 2\,e_1,\ f(e_2) = e_2 \qquad \text{und} \qquad g(e_1 - e_2) = c \cdot (e_1 - e_2),\ g(e_1) = e_1$$

gegeben.

   a) Man bestimme die darstellenden Matrizen von f, g und $f \circ g$ bezüglich der Basis e_1, e_2.
   b) Man untersuche, für welche $c \in \mathbb{R}$ die Abbildung $f \circ g$ diagonalisierbar ist.

8. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2006).* Es sei $n \geq 2$ und A eine reelle $n \times n$–Matrix. Man zeige:

   a) A ist genau dann invertierbar, wenn 0 kein Eigenwert von A ist.
   b) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A, so ist λ^2 ein Eigenwert von A^2. Ist zudem A invertierbar, so ist λ^{-1} ein Eigenwert von A^{-1}.
   c) Ist A reell diagonalisierbar, so gilt dies auch für A^2.
   d) Ist A^2 reell diagonalisierbar, so braucht dies für A nicht zu gelten. Hinweis: Man betrachte etwa spezielle Matrizen der Form

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a \neq 0.$$