

Repetitorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“

1. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2009*). Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 7 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

- a) Man zeige, daß $\lambda = 3$ ein Eigenwert von A ist, und bestimme den zugehörigen Eigenraum.
- b) Man zeige, daß $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ein Eigenvektor von A ist, und bestimme den zugehörigen Eigenwert.
- c) Man zeige, daß A diagonalisierbar ist, und gebe eine invertierbare Matrix $P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ sowie eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit $P^{-1}AP = D$ an.

2. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 2014*). In Abhängigkeit vom Parameter $a \in \mathbb{R}$ sei die Matrix

$$M_a = \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ 1 & a+1 & 0 \\ 0 & 1 & a+1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

gegeben. Man bestimme alle $a \in \mathbb{R}$, für die

- i) die Matrix M_a sowohl invertierbar als auch diagonalisierbar ist,
- ii) die Matrix M_a invertierbar, aber nicht diagonalisierbar ist,
- iii) die Matrix M_a nicht invertierbar, aber diagonalisierbar ist,
- iv) die Matrix M_a weder invertierbar noch diagonalisierbar ist.

3. (*Klausuraufgabe Sommersemester 2007*). Gegeben sei die Matrix

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2c & c & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3};$$

dabei ist $c \in \mathbb{R}$ ein reeller Parameter.

- a) Man bestimme (in Abhängigkeit von c) die reellen Eigenwerte von A_c samt ihren algebraischen Vielfachheiten.
- b) Man untersuche A_c (in Abhängigkeit von c) auf reelle Diagonalisierbarkeit.
- c) Man bestimme für $c = 4$ eine invertierbare Matrix $P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit $P^{-1}A_4P = D$.

4. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 2007*). Man betrachte den Endomorphismus

$$\varphi : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad \varphi(A) = A + A^T,$$

des $\mathbb{R}$ -Vektorraums $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ der reellen 2×2 -Matrizen.

- a) Man bestimme die darstellende Matrix von φ bezüglich der Basis

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

- b) Man zeige, daß φ diagonalisierbar ist, und bestimme eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ aus Eigenvektoren für φ .

5. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2013*). Man betrachte den von den vier Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

aufgespannten Untervektorraum $V = \langle v_1, v_2, w_1, w_2 \rangle$ im $\mathbb{R}^3$.

- a) Man zeige, daß v_1, v_2 eine Basis von V ist, und stelle w_1 und w_2 als Linearkombinationen von v_1, v_2 dar.
- b) Man begründe, daß es genau einen Endomorphismus $f : V \rightarrow V$ von V mit $f(v_1) = w_1$ und $f(v_2) = w_2$ gibt, und gebe die darstellende Matrix von f bezüglich der Basis v_1, v_2 von V an.
- c) Man zeige, daß f diagonalisierbar ist, und bestimme eine Basis von V aus Eigenvektoren von f .

6. (*Klausuraufgabe Sommersemester 2007*). Gegeben sei die Matrix

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

- a) Man zeige, daß 1 ein Eigenwert von A ist, und bestimme alle Eigenwerte und Eigenräume von A .
- b) Man bestimme eine Matrix $P \in O_3(\mathbb{R})$, so daß $P^T A P$ Diagonalgestalt hat.
- c) Man finde eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit $A = B^2$.

7. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2015*). Man beweise oder widerlege die folgenden Aussagen über reelle 2×2 -Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$:

- a) Ist A orthogonal, so muß $\det(A) = 1$ oder $\det(A) = -1$ sein.
- b) Ist A orthogonal, so sind 1 und -1 die einzig möglichen reellen Eigenwerte von A .
- c) Ist A orthogonal, so muß A den Eigenwert 1 oder den Eigenwert -1 besitzen.
- d) Ist A orthogonal, so ist A auch invertierbar.
- e) Ist A orthogonal, so ist A auch symmetrisch.

8. (Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2016). Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

betrachte man

$$\sigma : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \sigma(x, y) = x^\top \cdot A \cdot y.$$

- a) Man zeige, daß σ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ ist.
- b) Man berechne den Winkel $\angle_\sigma(e_1, e_2)$ zwischen e_1 und e_2 .
- c) Man bestimme eine Orthonormalbasis b_1, b_2, b_3 von $\mathbb{R}^3$ bezüglich σ mit

$$\langle b_1 \rangle = \langle e_1 \rangle \quad \text{und} \quad \langle b_1, b_2 \rangle = \langle e_1, e_2 \rangle.$$

9. (Staatsexamensaufgabe Herbst 2014). Im euklidischen $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt $\circ$ sei der von den Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

aufgespannte Untervektorraum $U = \langle u_1, u_2 \rangle$ gegeben.

- a) Man bestimme eine Basis des orthogonalen Komplements $U^\perp$ von U in $\mathbb{R}^4$.
- b) Man bestimme jeweils eine Orthonormalbasis von U und von $U^\perp$.
- c) Man bestimme mit Hilfe der Ergebnisse von a) und b) eine reelle symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, die U als Eigenraum zum Eigenwert -1 und $U^\perp$ als Eigenraum zum Eigenwert 2 besitzt.

10. Der euklidische $\mathbb{R}^3$ sei dem Standardskalarprodukt versehen.

- a) Man zeige, daß die lineare Abbildung

$$s_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad s_1(x) = S_1 \cdot x \quad \text{mit} \quad S_1 = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

eine Spiegelung an einer Ebene $E_1 \subseteq \mathbb{R}^3$ beschreibt, und gebe eine Gleichung für die Ebene E_1 an.

- b) Es sei $s_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, s_2(x) = S_2 \cdot x$, die Spiegelung an der Ebene

$$E_2 = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Man bestimme die Abbildungsmatrix $S_2 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ von s_2 .

- c) Man zeige, daß die Komposition $d = s_2 \circ s_1$ eine Drehung ist, und bestimme die Drehachse sowie den Cosinus des Drehwinkels von d .

11. (Klausuraufgabe Sommersemester 2012). Man betrachte den Vektorraum $\mathbb{R}^3$, versehen mit dem Standardskalarprodukt $\circ$.

a) Man bestimme die Abbildungsmatrix für eine Drehung mit der Drehachse

$$\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und dem Drehwinkel } \varphi \text{ mit } \cos \varphi = \frac{3}{5}.$$

b) Es sei $v \in \mathbb{R}^3$ mit $v \neq 0$ fest gewählt. Man zeige, daß es genau drei orthogonale Abbildungen $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $f \circ f \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$ und $f(v) = v$ gibt, und interpretiere diese geometrisch.

12. (Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2016). Im reellen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ seien die Ebene

$$E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sowie (in Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$) die affine Teilmenge

$$E_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 + \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 - \alpha \\ \alpha - 1 \\ -\alpha \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Man zeige, daß E_α ist für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ eine Ebene ist.

b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ schneiden sich die beiden Ebenen E und E_α ?

13. (Klausuraufgabe Sommersemester 2012). Im euklidischen $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 1 + \alpha \\ 1 - \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

gegeben; dabei ist $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter.

a) • Man zeige, daß a , b und c eine Ebene E aufspannen, und gebe eine Gleichung für E an.

• Man bestimme in Abhängigkeit von α den Abstand von d zu E . Für welche α liegen d und der Ursprung auf derselben Seite von E ?

• Für welche α ist die Verbindungsgerade von a und b senkrecht zur Verbindungsgeraden von c und d ?

b) Es sei nun $\alpha = 0$. Man zeige, daß es genau eine affine Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x) = A \cdot x + t$, mit

$$f(a) = 0, \quad f(b) = e_1, \quad f(c) = e_2 \quad \text{und} \quad f(d) = e_3$$

gibt, und bestimme A und t . Ist f eine Affinität?

14. Man betrachte den euklidischen $\mathbb{R}^3$, versehen mit dem Standardskalarprodukt $\circ$.

a) (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2009*). Im $\mathbb{R}^3$ seien die beiden Geraden

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Man bestimme die Fußpunkte des gemeinsamen Lotes und den Abstand beider Geraden.

b) (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2007*). Man gebe im $\mathbb{R}^3$ zwei nicht parallele Geraden g durch $(1, 1, 0)$ und h durch $(0, 1, 1)$ an, welche sich nicht schneiden, und bestimme den Abstand zwischen g und h .

15. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 2015*). Die Bewegung $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ bilde die Punktmenge $\{a, b, c\}$ auf die Punktmenge $\{d, e, f\}$ (nicht notwendigerweise in dieser Reihenfolge) ab. Dabei ist

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Man zeige, daß es genau zwei Möglichkeiten für g gibt.

b) Man zeige, daß eine davon eine Drehung ist. Man bestimme das zugehörige Drehzentrum und den Drehwinkel.

c) Man zeige, daß die andere Möglichkeit eine Gleitspiegelung ist. Man bestimme die zugehörige Spiegelachse und den Verschiebungsvektor.

16. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 2009*). Man betrachte die affine Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad f(x) = A \cdot x + b,$$

mit der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und dem Vektor $b \in \mathbb{R}^n$. Man zeige:

a) Die Menge der Fixpunkte von f

$$\text{Fix}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = x\}$$

ist eine affine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.

b) Wenn 1 kein Eigenwert von A ist, dann hat f genau einen Fixpunkt.

Bitte beachten: Die Aufgaben dieses Repetitoriums sollen der eigenständigen Wiederholung und Vertiefung des Stoffes vom Sommersemester dienen. Die Lösungsvorschläge werden zu gegebener Zeit veröffentlicht.