MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2016
Blatt 12
06.07.2016

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“ — Lösungsvorschlag —

45. a) Die gegebene Ebene

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + 2\,y + 3\,z = 1 \right\},$$

besitzt den Normalenvektor

$$\widetilde{u}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{der Länge} \qquad \|\widetilde{u}_E\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

und damit die Hessesche Normalform

$$E \quad : \quad \frac{x + 2\,y + 3\,z - 1}{\sqrt{14}} = 0;$$

die gegebene Gerade

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}.$$

besitzt den Trägerpunkt t_g und den Richtungsvektor u_g mit

$$t_g = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad u_g = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\widetilde{u}_E \circ u_g = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 = 0$$

steht der Richtungsvektor u_g der Geraden g senkrecht auf dem Normalenvektor $\widetilde{u}_E$ der Ebene E und ist demnach auch ein Richtungsvektor der Ebene E; folglich sind aber E und g parallel.

b) Da gemäß a) die E und g parallel sind, stimmt der euklidische Abstand der Geraden g von der Ebene E mit dem euklidischen Abstand eines beliebigen Punktes auf g von E überein; mit der bereits in a) bestimmten Hesseschen Normalform von E ergibt sich also

$$d(g, E) = d\left(t_g, E\right) = \left| \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 1}{\sqrt{14}} \right| = \frac{5}{\sqrt{14}}.$$

46. a) Der Durchschnitt $E_1 \cap E_2$ der beiden im $\mathbb{R}^3$ gegebenen Ebenen

$$E_1 \;:\; x + y + z = 1 \qquad \text{und} \qquad E_2 \;:\; x - y + z = -1$$

besteht genau aus denjenigen Punkten des $\mathbb{R}^3$, deren Koordinaten x, y und z den beiden Ebenengleichungen genügen, und stimmt daher mit der Lösungsmenge des inhomogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{lcccccccc} E_1 & : & x & + & y & + & z & = & 1 \\ E_2 & : & x & - & y & + & z & = & -1 \end{array}$$

überein; wir betrachten die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \underset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right) \underset{-\frac{1}{2}\cdot\text{II}}{\rightsquigarrow}$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{I}-\text{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

und erhalten

$$E_1 \cap E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} -\lambda \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

b) Die beiden Ebenen E_1 und E_2 besitzen die Normalenvektoren

$$\widetilde{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \widetilde{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

jeweils der Länge $\|\widetilde{u_1}\| = \sqrt{3} = \|\widetilde{u_2}\|$ und damit die Hesseschen Normalform

$$E_1 \;:\; \frac{x + y + z - 1}{\sqrt{3}} = 0 \qquad \text{und} \qquad E_2 \;:\; \frac{x - y + z + 1}{-\sqrt{3}} = 0.$$

Der Punkt $p = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ besitzt damit von E_1 bzw. E_2 den Abstand

$$d(p, E_1) = \left| \frac{x + y + z - 1}{\sqrt{3}} \right| \qquad \text{bzw.} \qquad d(p, E_2) = \left| \frac{x - y + z + 1}{-\sqrt{3}} \right|,$$

und es gilt

$$\begin{aligned}
p \in P \quad &\iff \quad d(p, E_1) = d(p, E_2) \\
&\iff \quad \left|\frac{x+y+z-1}{\sqrt{3}}\right| = \left|\frac{x-y+z+1}{-\sqrt{3}}\right| \\
&\iff \quad \frac{|x+y+z-1|}{\sqrt{3}} = \frac{|x-y+z+1|}{\sqrt{3}} \\
&\iff \quad |x+y+z-1| = |x-y+z+1| \\
&\iff \quad x+y+z-1 = \pm\,(x-y+z+1) \\
&\iff \quad x+y+z-1 = x-y+z+1 \\
&\qquad\qquad \text{oder} \quad x+y+z-1 = -x+y-z-1 \\
&\iff \quad 2\,y = 2 \quad \text{oder} \quad 2\,x + 2\,z = 0 \\
&\iff \quad y = 1 \quad \text{oder} \quad x + z = 0;
\end{aligned}$$

somit ist P die Vereinigung der beiden Ebenen $E_3 : y = 1$ und $E_4 : x+z = 0$ mit den Parameterformen

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$E_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

47. Für die Gerade g im euklidischen $\mathbb{R}^3$ durch die Punkte P_1 und P_2 ergibt sich die Parameterdarstellung $g = t_g + \mathbb{R} \cdot u_g$ mit

$$t_g = P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad u_g = P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

die Schnittgerade $h = E_1 \cap E_2$ ist genau die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & & & - & z & = & 0 \\ 2\,x & + & y & & & = & 0 \end{array}$$

und besitzt damit wegen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{II}-2\text{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

die Parameterdarstellung $h = t_h + \mathbb{R} \cdot u_h$ mit

$$t_h = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad u_h = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die gemeinsame Lotgerade ℓ der Geraden g und h besitzt den Richtungsvektor

$$u_g \times u_h = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \widetilde{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix};$$

seien x_0 und y_0 die Lotfußpunkte auf g und h. Dabei besitzt y_0 (als Punkt von h) die Gestalt

$$y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit einem geeigneten $\mu \in \mathbb{R}$, wodurch sich für die gemeinsame Lotgerade

$$\ell = y_0 + \mathbb{R} \cdot \widetilde{u} = \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ergibt; folglich erhält man für den Lotfußpunkt x_0 die Darstellungen

$$\underbrace{\mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\in \ell} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in g}$$

mit geeigneten Parametern τ, $\lambda \in \mathbb{R}$ und somit

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu \\ \tau \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{II}+2\mathrm{I}}{\underset{\mathrm{III}-\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right) \underset{\mathrm{III}+\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

erhält man $\lambda = 0$, $\tau = 1$ und $\mu = 0$, so daß sich

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ergibt. Für den Abstand der Geraden g und h gilt damit

$$d(g,h) = d(x_0, y_0) = \|x_0 - y_0\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2}.$$

48. In $\mathbb{R}^4$ sind die beiden Geraden $g = t_g + \mathbb{R} \cdot u_g$ und $h = t_h + \mathbb{R} \cdot u_h$ mit

$$t_g = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad u_g = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad t_h = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u_h = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

gegeben. Damit besitzt jeder Punkt P_g auf g die Gestalt

$$P_g = t_g + \alpha \cdot u_g = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+\alpha \\ -2-\alpha \\ 3+2\alpha \\ 5 \end{pmatrix}$$

für ein $\alpha \in \mathbb{R}$, und jeder Punkt P_h auf h ist von der Gestalt

$$P_h = t_h + \beta \cdot u_h = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2-\beta \\ 2-\beta \\ 3+3\beta \end{pmatrix}$$

für ein $\beta \in \mathbb{R}$; für den Verbindungsvektor $\widetilde{u} = \overrightarrow{P_g P_h}$ ergibt sich damit

$$\widetilde{u} = P_h - P_g = \begin{pmatrix} -1 \\ 2-\beta \\ 2-\beta \\ 3+3\beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4+\alpha \\ -2-\alpha \\ 3+2\alpha \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5-\alpha \\ 4+\alpha-\beta \\ -1-2\alpha-\beta \\ -2+3\beta \end{pmatrix},$$

und es gilt zum einen

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{P_g P_h} \perp g \iff \widetilde{u} \perp u_g \iff \widetilde{u} \circ u_g = 0 \iff \\ &\quad (-5-\alpha) \cdot 1 + (4+\alpha-\beta) \cdot (-1) + (-1-2\alpha-\beta) \cdot 2 + (-2+3\beta) \cdot 0 = 0 \\ &\qquad \iff -5-\alpha-4-\alpha+\beta-2-4\alpha-2\beta = 0 \iff -6\alpha-\beta = 11 \end{aligned}$$

und zum anderen

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{P_g P_h} \perp h \iff \widetilde{u} \perp u_h \iff \widetilde{u} \circ u_h = 0 \iff \\ &(-5-\alpha) \cdot 0 + (4+\alpha-\beta) \cdot (-1) + (-1-2\alpha-\beta) \cdot (-1) + (-2+3\beta) \cdot 3 = 0 \\ &\qquad \iff -4-\alpha+\beta+1+2\alpha+\beta-6+9\beta = 0 \iff \alpha+11\beta = 9. \end{aligned}$$

Damit steht der Verbindungsvektor $\overrightarrow{P_g P_h}$ genau dann sowohl auf g als auch auf h senkrecht, wenn die Parameter α und β das lineare Gleichungssystem

$$-6\alpha - \beta = 11 \qquad \text{und} \qquad \alpha + 11\beta = 9$$

lösen, wegen

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{cc|c} -6 & -1 & 11 \\ 1 & 11 & 9 \end{array}\right) \underset{\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 11 & 9 \\ -6 & -1 & 11 \end{array}\right) \underset{\mathrm{II}+6\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \\ &\qquad \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 11 & 9 \\ 0 & 65 & 65 \end{array}\right) \underset{\frac{1}{65} \cdot \mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 11 & 9 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\mathrm{I}-11 \cdot \mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{aligned}$$

also genau für $\alpha = -2$ und $\beta = 1$. Die sich ergebenden Punkte

$$P_g = \begin{pmatrix} 4 + (-2) \\ -2 - (-2) \\ 3 + 2 \cdot (-2) \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad P_h = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 - 1 \\ 2 - 1 \\ 3 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

sind die Lotfußpunkte der gemeinsamen Lotgeraden ℓ von g und h, so daß man für deren Abstand

$$\begin{aligned} d(g,h) = d(P_g, P_h) = \|P_h - P_g\| &= \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \\ &= \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9 + 1 + 4 + 1} = \sqrt{15} \end{aligned}$$

erhält.