MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2016
Blatt 11
29.06.2016

# Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“ — Lösungsvorschlag —

41. Wir betrachten für das durch die drei Parameter $r$, $s$, $t \in \mathbb{R}$ gegebene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2\,x_2 & & & + & 2\,x_4 & = & 4 \\ 2\,x_1 & + & 4\,x_2 & + & r\,x_3 & & & = & 1 \\ s\,x_1 & & & + & x_3 & + & t\,x_4 & = & 1 \end{array}$$

die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & r & 0 & 1 \\ s & 0 & 1 & t & 1 \end{array}\right);$$

ist nun das Gleichungssystem lösbar, so gibt die Anzahl der freien Variablen die Dimension der Lösungsmenge an.

a) Wegen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & r & 0 & 1 \\ s & 0 & 1 & t & 1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{II}+(-2)\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & r & -4 & -7 \\ s & 0 & 1 & t & 1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{III}+(-s)\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & r & -4 & -7 \\ 0 & -2\,s & 1 & t-2\,s & 1-4\,s \end{array}\right) \overset{\mathrm{II}\leftrightarrow\mathrm{III}}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2\,s & 1 & t-2\,s & 1-4\,s \\ 0 & 0 & r & -4 & -7 \end{array}\right)$$

treffen wir die folgende Fallunterscheidung:

- Fall 1: $s \neq 0$. Damit sind
  - im Falle $r \neq 0$ die Variablen $x_1$, $x_2$, $x_3$ gebunden sowie $x_4$ frei sowie
  - im Falle $r = 0$ die Variablen $x_1$, $x_2$, $x_4$ gebunden sowie $x_3$ frei;

  auf jeden Fall ist das Gleichungssystem lösbar mit einer affinen Geraden als Lösungsmenge.

- Fall 2: $s = 0$. Wegen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & r & 0 & 1 \\ s & 0 & 1 & t & 1 \end{array}\right) \overset{\text{s.o.}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & t & 1 \\ 0 & 0 & r & -4 & -7 \end{array}\right) \overset{\text{III}+(-r)\text{II}}{\rightsquigarrow}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & t & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 - r\,t & -7 - r \end{array}\right)$$

  sind auf jeden Fall $x_1$ und $x_3$ gebunden sowie $x_2$ frei, so daß das Gleichungssystem genau dann eine affine Gerade als Lösungsmenge besitzt, wenn $x_4$ ebenfalls gebunden ist, also genau im Falle $-4 - r\,t \neq 0$ bzw. $r\,t \neq -4$.

b) Gemäß a) besitzt das Gleichungssystem für $s \neq 0$ oder $s = 0$ und $r\,t \neq -4$ eine eindimensionale Lösungsmenge; daher kommt eine affine Ebene als Lösungsmenge nur im Fall $s = 0$ und $r\,t = -4$ in Frage. Wegen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & r & 0 & 1 \\ s & 0 & 1 & t & 1 \end{array}\right) \overset{\text{a)}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & t & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 - r \end{array}\right)$$

ist das Gleichungssystem genau dann lösbar, wenn $-7 - r = 0$ gilt; damit muß $r = -7$ und wegen $r\,t = -4$ auch $t = \frac{4}{7}$ gelten. Für diese Wahl der Parameter ergibt sich als Lösungsmenge

$$L = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -14 \\ 0 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix},$$

also eine affine Ebene.

42. Es ist $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ genau dann ein gemeinsamer Punkt der drei Ebenen

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcc} E_1 & : & x & - & \frac{1}{4}\,y & - & 2\,z & + & 1 & = & 0 \\ E_2 & : & 2\,x & - & \frac{5}{2}\,y & - & 5\,z & - & \lambda & = & 0 \\ E_3 & : & 4\,x & + & \lambda\,y & - & 6\,z & - & \mu & = & 0 \end{array}$$

wenn seine Koordinaten den drei Ebenengleichungen genügen, er also Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & \frac{1}{4}\,y & - & 2\,z & = & -1 \\ 2\,x & - & \frac{5}{2}\,y & - & 5\,z & = & \lambda \\ 4\,x & + & \lambda\,y & - & 6\,z & = & \mu \end{array}$$

mit der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|b)$ für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & -2 \\ 2 & -\frac{5}{2} & -5 \\ 4 & \lambda & -6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

ist. Mit der Regel von Sarrus ergibt sich

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & -2 \\ 2 & -\frac{5}{2} & -5 \\ 4 & \lambda & -6 \end{vmatrix} = (15 + 5 - 4\,\lambda) - (20 - 5\,\lambda + 3) = \lambda - 3,$$

so daß für $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ die Matrix $A$ wegen $\det(A) \neq 0$ invertierbar ist; folglich ist in diesem Fall das durch $(A|b)$ gegebene lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar, die drei Ebenen $E_1$, $E_2$ und $E_3$ schneiden sich also in genau einem Punkt.

Für die hier zu betrachtenden Fälle muß also $\lambda = 3$ gelten, und dabei gilt

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{4} & -2 & -1 \\ 2 & -\frac{5}{2} & -5 & 3 \\ 4 & 3 & -6 & \mu \end{array}\right) \underset{2\cdot\mathrm{II}}{\overset{4\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & -8 & -4 \\ 4 & -5 & -10 & 6 \\ 4 & 3 & -6 & \mu \end{array}\right) \underset{\mathrm{III}-\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}-\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & -8 & -4 \\ 0 & -4 & -2 & 10 \\ 0 & 4 & 2 & \mu+4 \end{array}\right) \underset{\mathrm{III}+\mathrm{IV}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & -8 & -4 \\ 0 & -4 & -2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & \mu+14 \end{array}\right),$$

wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

- Für $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{-14\}$ ist $\mu + 14 \neq 0$ und damit

  $$\mathrm{Rang}(A) = 2 < 3 = \mathrm{Rang}(A|b);$$

  folglich ist das durch $(A|b)$ gegebene lineare Gleichungssystem unlösbar, und die drei Ebenen $E_1$, $E_2$ und $E_3$ haben keinen gemeinsamen Punkt.

- Für $\mu = -14$ ergibt sich

  $$(A|b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & -8 & -4 \\ 0 & -4 & -2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

  so daß das durch $(A|b)$ gegebene lineare Gleichungssystem wegen

  $$\mathrm{Rang}(A) = 2 = \mathrm{Rang}(A|b)$$

  lösbar ist und die Lösungmenge $L$ die Dimension $3 - \mathrm{Rang}(A) = 1$ besitzt. Folglich schneiden sich die drei Ebenen $E_1$, $E_2$ und $E_3$ in der Geraden

  $$L = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

43. Die gegebene Ebene $E$ durch die drei Punkte

$$P = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

besitzt den Trägerpunkt $P$ sowie die beiden (linear unabhängigen) Richtungsvektoren

$$u_1 = Q - P = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad u_2 = R - P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und damit die Parameterdarstellung

$$E = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist

$$\widetilde{u} = u_1 \times u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Normalenvektor der Ebene $E$, und wir erhalten die Gleichung

$$E \quad : \quad \widetilde{u} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \widetilde{u} \circ P \qquad \text{bzw.} \qquad x + y + z = -1.$$

Die gegebene Gerade $g$, die den Ursprung 0 enthält und auf $E$ senkrecht steht, besitzt den Trägerpunkt 0 und den Richtungsvektor $\widetilde{u}$ und damit die Parameterdarstellung

$$g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Schnittpunkt $S$ von $g$ und $E$ besitzt (als Punkt von $g$) die Gestalt

$$S = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$$

für ein geeignetes $\lambda \in \mathbb{R}$, und wegen $S \in E$ gilt

$$\lambda + \lambda + \lambda = -1, \qquad \text{also} \qquad 3\,\lambda = -1 \qquad \text{bzw.} \qquad \lambda = -\frac{1}{3};$$

damit ergibt sich

$$S = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Als Spiegelpunkt $T$ von 0 an der Ebene $E$ erhält man schließlich

$$T = \underbrace{0 + (S - 0)}_{=\text{Lotfußpunkt } S} + (S - 0) = 2 \cdot S = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

44. Im euklidischen $\mathbb{R}^3$ sind die folgenden drei Geraden zu betrachten:

- Die Gerade $L_1$ ist als Schnittmenge der beiden Ebenen

$$E_1 \quad : \quad x + y - z = 1 \qquad \text{und} \qquad E_2 \quad : \quad 2\,x - y - 2\,z = -1$$

gegeben und stellt daher die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 1 \\ 2\,x & - & y & - & 2\,z & = & -1 \end{array}$$

dar.

- Die Gerade $L_2$ ist über ihre Parameterdarstellung

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2-t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

gegeben.

- Die Gerade $L_3$ ist als Verbindungsgerade der beiden Punkte

$$q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad q_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben, besitzt demnach mit dem Trägerpunkt $q_1$ und dem Richtungsvektor $u = q_2 - q_1$ die Parameterdarstellung

$$q_1 + \mathbb{R} \cdot u = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} -2\,s \\ 3-4\,s \\ -2+2\,s \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Im folgenden stützen wir uns auf diese Darstellungen für die drei Geraden.

a) Wir zeigen, daß sich sich die Geraden paarweise schneiden und bestimmen die drei Schnittpunkte:

- Für einen gemeinsamen Punkt $p_1$ von $L_2$ und $L_3$ gilt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2-t \\ t \end{pmatrix} = p_1 = \begin{pmatrix} -2\,s \\ 3-4\,s \\ -2+2\,s \end{pmatrix},$$

was genau für $s = -\frac{1}{2}$ und $t = -3$ erfüllt ist; damit schneiden sich die beiden Geraden $L_2$ und $L_3$ im Punkt $p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

- Der Punkt $p_2 = \begin{pmatrix} -2\,s \\ 3-4\,s \\ -2+2\,s \end{pmatrix}$ von $L_3$ mit $s \in \mathbb{R}$ liegt genau dann auch auf $L_1$, wenn

$$\begin{array}{rcrcrcr} (-2\,s) & + & (3-4\,s) & - & (-2+2\,s) & = & 1 \\ 2\,(-2\,s) & - & (3-4\,s) & - & 2\,(-2+2\,s) & = & -1 \end{array}$$

  gilt, was genau für $s = \frac{1}{2}$ erfüllt ist; damit schneiden sich die beiden Geraden $L_1$ und $L_3$ im Punkt $p_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- Der Punkt $p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-t \\ t \end{pmatrix}$ von $L_2$ mit $t \in \mathbb{R}$ liegt genau dann auch auf $L_1$, wenn

$$\begin{array}{rcrcrcr} 1 & + & (2-t) & - & t & = & 1 \\ 2 \cdot 1 & - & (2-t) & - & 2\,t & = & -1 \end{array}$$

  gilt, was genau für $t = 1$ erfüllt ist; damit schneiden sich die beiden Geraden $L_1$ und $L_2$ im Punkt $p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Wir betrachten das Dreieck $\Delta \subseteq \mathbb{R}^3$ mit den Eckpunkten $p_1$, $p_2$, $p_3$. Die beiden Richtungsvektoren

$$u = p_1 - p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und

$$v = p_3 - p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

von $p_2$ zu $p_1$ bzw. $p_3$ sind gemäß

$$u \circ v = 2 \cdot 2 + 4 \cdot 0 + (-2) \cdot 2 = 0$$

orthogonal, so daß im Eckpunkt $p_2$ ein rechter Innenwinkel $\delta_2 = \frac{\pi}{2} = 90°$ vorliegt. Für den Flächeninhalt $F_\Delta$ des rechtwinkligen Dreiecks $\Delta$ ergibt sich damit

$$F_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \|u\| \cdot \|v\| = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\left\| 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|}_{=2\sqrt{6}} \cdot \underbrace{\left\| 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|}_{=2\sqrt{2}} = 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}.$$

Für den Innenwinkel $\delta_1$ im Eckpunkt $p_1$ gilt

$$\tan \delta_1 = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\|v\|}{\|u\|} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

und damit $\delta_1 = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$, so daß sich über die Innenwinkelsumme im Dreieck für den Innenwinkel $\delta_3$ im Eckpunkt $p_3$ dann

$$\delta_3 = \pi - (\delta_1 + \delta_2) = \pi - \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$$

ergibt.